УДК 514.12

Оптимальный способ определения суммы углов в треугольнике с помощью центральной симметрии

Плисова Ника Николаевна

Аннотация: Сумма внутренних углов в произвольном треугольнике, равная π, определена с помощью центральной симметрии оптимальным способом – композицией двух центральных симметрий. Использование центральной симметрии является независимым способом определения суммы углов в треугольнике, то есть не использующим аксиому о параллельных прямых.

Ключевые слова: сумма углов в треугольнике, центральная симметрия, классическая геометрия.

В статье автора [1] была поставлена и решена задача – определить сумму углов в произвольном треугольнике с помощью центральной симметрии.

В настоящей статье ставится задача: Оптимально определить сумму внутренних углов в произвольном треугольнике с помощью центральной симметрии.

Доказательство базируется на аксиоматике планиметрии, приведенной в [2].

Решение: Рассмотрим произвольный треугольник *ABC*. Обозначим длины его сторон следующим образом: $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|AC| = c$. Середину его стороны *BC* обозначим через *O*; точка *O* определяется как точка пересечения отрезка *BC* и серединного перпендикуляра к нему. Применим к треугольнику *ABC* центральную симметрию с центром симметрии в точке *O*. Порядок определения точки, центрально симметричной данной, приведен в [2], в п. 7.1. Точка *B* и точка *C* центрально симметричны относительно точки *O*. Образом точки *A* относительно центра симметрии *O* является точка *E* (Рис. 1), при этом, по определению центрально симметричных точек (Def. 7.4.2.), точки *A*, *O* и *E* лежат на одной прямой, а отрезки *AO* и *OE* равны. Соединяем отрезками точку *E* с точками *B* и *C*, образуется треугольник *ECB*. Треугольник *ECB* является образом треугольника *ABC* относительно центра симметрии – точки *O*. По теореме 7.1.1. о сохранении расстояний между двумя точками при центральной симметрии, отрезок *EC* равен отрезку *AB*, отрезок *EB* равен отрезку *AC*, следовательно, треугольник *ECB* равен треугольнику *ABC* по трем сторонам (Ах. 8.5.3.). Угол *ECB* равен углу *ABC*, угол *CEB* равен углу *BAC* – по аксиоме о равенстве фигур (Ах. 6.8.).

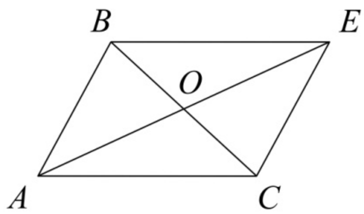

Рисунок 1.

$$\left(\Delta ABC : \left(O \in (BC)\right) \wedge (BO = OC)\right)$$
$$\left(\left(Z_O B = C\right) \wedge \left(Z_O C = B\right) \wedge \left(Z_O A = E\right)\right)$$
$$\left(\left([BE] \supset \{B, C\}\right) \wedge \left([CE] \supset \{C, E\}\right)\right) \Rightarrow (\Delta ECB)$$
$$\left(Z_O \Delta ABC = \Delta ECB\right) \Rightarrow \left(\text{Т.7.1.1.} \because (EC = AB) \wedge (EB = AC)\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(\text{Ax.8.5.3.} \because \Delta ECB = \Delta ABC\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(\text{Ax.6.8.} \because (\angle ECB = \angle ABC) \wedge (\angle CEB = \angle BAC)\right)$$

Обозначим середины отрезков AC, BE, AB, CE через M_1, M_2, M_3, M_4 соответственно (Рис. 2); середины отрезков определяются как точки пересечения отрезков и серединных перпендикуляров к ним.

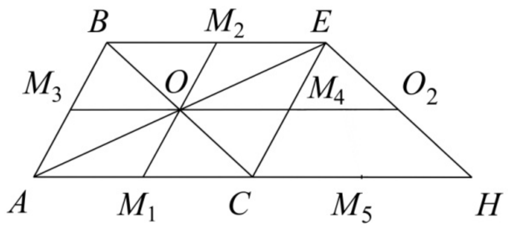

Рисунок 2.

Применим к отрезку AC центральную симметрию с центром симметрии в точке C. Образом точки A относительно центра симметрии C станет точка H; при этом, по определению центрально симметричных точек (Def. 7.4.2.), точки A, C и H лежат на одной прямой, отрезок AC равен отрезку CH (Рис. 2). Образом точки M_1 относительно центра симметрии C станет точка M_5; при этом, по определению центрально симметричных точек (Def. 7.4.2.), точки M_1, C и M_5 лежат на одной прямой – прямой AC, отрезок M_1C равен отрезку CM_5 (Рис. 2).

$$\begin{pmatrix} \left(M_1 : AM_1 = M_1C\right) \wedge \left(M_2 : BM_2 = M_2E\right) \wedge \\ \wedge \left(M_3 : AM_3 = M_3B\right) \wedge \left(M_4 : CM_4 = M_4E\right) \end{pmatrix}$$

$$\left(Z_C A = H \middle| \text{Def.7.4.2.} \because \left(H \in \left(AC\right)\right) \wedge \left(AC = CH\right)\right)$$

$$\left(Z_C M_1 = M_5 \middle| \text{Def.7.4.2.} \because \left(\left\{M_1, M_5\right\} \subset \left(AC\right)\right) \wedge \left(M_1C = CM_5\right)\right)$$

Применим к отрезку OM_4 центральную симметрию с центром симметрии в точке M_4. Образом точки O относительно центра симметрии M_4 станет точка O_2; при этом, по определению центрально симметричных точек (Def. 7.4.2.), точки O, M_4 и O_2 лежат на одной прямой, отрезок OM_4 равен отрезку M_4O_2 (Рис. 2).

$$\left(Z_{M_4} O = O_2 \middle| \text{Def.7.4.2.} \because \left(O_2 \in \left(OM_4\right)\right) \wedge \left(OM_4 = M_4O_2\right)\right)$$

Применим к треугольнику ECB центральную симметрию с центром симметрии в точке M_4. Образом точки B будет точка H, что будет доказано далее, образом треугольника ECB при центральной симметрии относительно точки M_4 будет треугольник CEH (Рис. 2): $Z_{M_4} \Delta ECB = \Delta CEH$. По теореме 7.1.1. о сохранении расстояний между двумя точками при центральной симметрии: $CH = EB$, $EH = CB$, следовательно, треугольник CEH равен треугольнику ECB по трем сторонам (Ax. 8.5.3.). По аксиоме о равенстве фигур (Ax. 6.8.), угол ECH равен углу CEB, равному углу BAC.

$$\left(\left(Z_C A = H\right) \wedge \left(Z_C M_1 = M_5\right) \wedge \left(Z_{M_4} O = O_2\right)\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(Z_{M_4} \Delta ECB = \Delta CEH\right) \Rightarrow \left(\text{T.7.1.1.} \because \left(CH = EB\right) \wedge \left(EH = CB\right)\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(\text{Ax.8.5.3.} \because \Delta CEH = \Delta ECB\right) \Rightarrow \left(\text{Ax.6.8.} \because \angle ECH = \angle CEB = \angle BAC\right)$$

Предположим, что образом точки *B* относительно центра симметрии M_4 будет некоторая точка *D*, отличная от точки *H*. Если точка *D* лежит на прямой *AC*, то $CD \neq EB = c$, следовательно, треугольники *CED* и *ECB* не равны. Если точка *D* не лежит на прямой *AC* (Рис. 3), то $\angle ECD \neq \angle ECH$.

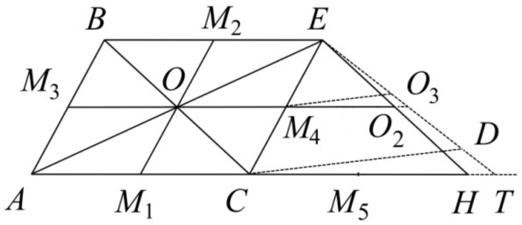

Рисунок 3.

По аксиоме 4.7.2. об аддитивности прилегающих углов: $\angle CED = \angle CEH + \angle HED > \angle CEH$, то есть $\angle CED \neq \angle CEH$ при условии, что $\angle ECD \neq \angle ECH$. Тогда образом точки *O* относительно центра симметрии M_4 будет точка O_3, отличная от точки O_2, следовательно: или $M_4O_3 \neq M_4O_2 = OM_4$, или точка O_3 не лежит на прямой OM_4, что противоречит определению центрально симметричных точек (Def. 7.4.2.). Предположение о том, что образом точки *B* относительно центра симметрии M_4 является точка *D*, отличная от точки *H*, приводит к противоречию, следовательно, оно неверно, следовательно, образом точки *B* относительно центра симметрии M_4 является точка *H*.

$$?\left(Z_{M_4} B = D \not\equiv H\right) \Rightarrow \left(CD \neq EB = c \,\middle|\, D \in \left(AC\right)\right) \Rightarrow \left(\Delta CED \neq \Delta ECB\right)$$
$$?\left(D \notin \left(AC\right)\right) \Rightarrow \left(\angle ECD \neq \angle ECH\right)$$
$$\left(\text{Ax.4.7.2.} \because \angle CED = \angle CEH + \angle HED > \angle CEH\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(\angle CED \neq \angle CEH \,\middle|\, \angle ECD \neq \angle ECH\right) \Rightarrow \left(Z_{M_4} O = O_3 \not\equiv O_2\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(\left(\left(M_4O_3 \neq M_4O_2 = OM_4\right) \vee \left(O_3 \notin \left(OM_4\right)\right)\right) \perp \text{Def.7.4.2.}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \neg\left(Z_{M_4} B = D \not\equiv H\right) \Rightarrow \left(Z_{M_4} B = H\right)$$

Углы *ACB*, *BCE* и *ECH* образуют развернутый угол *ACH* (Рис. 2), следовательно, сумма величин углов треугольника *ABC*: $\angle ACB$, $\angle ABC = \angle BCE$ и $\angle BAC = \angle ECH$ равна π (Def. 4.11.).

$$\left(\text{Def.4.11.} \because \widehat{ACH} = \widehat{ACB} + \widehat{BCE} + \widehat{ECH} = \pi\right) \Leftrightarrow \left(\widehat{ACB} + \widehat{ABC} + \widehat{BAC} = \pi\right)$$

На рисунках 1–2 представлен остроугольный треугольник. Рассмотрим произвольный тупоугольный треугольник ABC. Середину его стороны BC обозначим через O. Применим к треугольнику ABC центральную симметрию с центром симметрии в точке O (Рис. 4); середина отрезка определяется как точка пересечения отрезка и серединного перпендикуляра к нему. Точки B и C симметричны относительно центра симметрии – точки O; образом точки A относительно центра симметрии O является точка E (Рис. 4). Соединяем отрезками точку E с точками B и C, образуется треугольник ECB. Треугольник ECB является образом треугольника ABC относительно центра симметрии – точки O. По теореме 7.1.1. о сохранении расстояний между двумя точками при центральной симметрии, отрезок EC равен отрезку AB, отрезок EB равен отрезку AC, следовательно, треугольник ECB равен треугольнику ABC по трем сторонам (Ax. 8.5.3.). Угол ECB равен углу ABC, угол CEB равен углу BAC – по аксиоме о равенстве фигур (Ax. 6.8.).

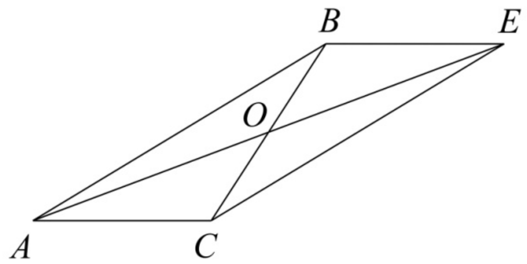

Рисунок 4.

$$\left(\Delta ABC:\left(O\in\left(BC\right)\right)\wedge\left(BO=OC\right)\right)$$
$$\left(\left(Z_O B=C\right)\wedge\left(Z_O C=B\right)\wedge\left(Z_O A=E\right)\right)$$
$$\left(\left(\left[BE\right]\supset\left\{B,C\right\}\right)\wedge\left(\left[CE\right]\supset\left\{C,E\right\}\right)\right)\Rightarrow\left(\Delta ECB\right)$$
$$\left(Z_O\Delta ABC=\Delta ECB\right)\Rightarrow\left(\text{T.7.1.1.}\because\left(EC=AB\right)\wedge\left(EB=AC\right)\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left(\text{Ax.8.5.3.}\because\Delta ECB=\Delta ABC\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left(\text{Ax.6.8.}\because\left(\angle ECB=\angle ABC\right)\wedge\left(\angle CEB=\angle BAC\right)\right)$$

Применим к треугольнику ECB центральную симметрию с центром симметрии в точке M_4 – середине отрезка CE. Образом треугольника ECB при центральной симметрии относительно точки M_4 будет треугольник CEH (Рис. 5): $Z_{M_4}\Delta ECB=\Delta CEH$. По теореме 7.1.1. о сохранении расстояний между двумя точками при центральной симметрии: $CH = EB$, $EH = CB$, следовательно, треугольник CEH равен треугольнику ECB по трем сторонам (Ax. 8.5.3.). По аксиоме о равенстве фигур (Ax. 6.8.), угол ECH равен углу CEB, равному углу BAC.

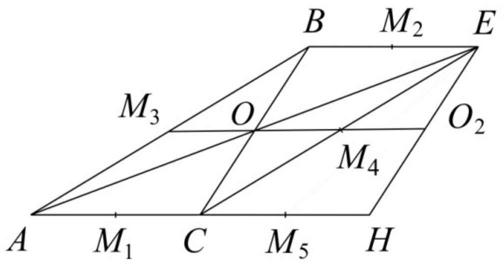

Рисунок 5.

$$\left(Z_{M_4}\Delta ECB = \Delta CEH\right) \Rightarrow \left(\text{T.7.1.1.} \because \left(CH = EB\right) \wedge \left(EH = CB\right)\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(\text{Ax.8.5.3.} \because \Delta CEH = \Delta ECB\right) \Rightarrow \left(\text{Ax.6.8.} \because \angle ECH = \angle CEB = \angle BAC\right)$$

Углы *ACB*, *BCE* и *ECH* образуют развернутый угол *ACH* (Рис. 5), следовательно, по определению развернутого угла (Def. 4.11.), сумма величин углов треугольника *ABC*: $\angle ACB$, $\angle ABC = \angle BCE$ и $\angle BAC = \angle ECH$ равна π.

$$\left(\widehat{ACH} = \widehat{ACB} + \widehat{BCE} + \widehat{ECH} := \pi\right) \Leftrightarrow \left(\widehat{ACB} + \widehat{ABC} + \widehat{BAC} = \pi\right)$$

Рассмотрим произвольный прямоугольный треугольник *ABC*. Середину его стороны *BC* обозначим через *O*. Образом треугольника *ABC* относительно центра симметрии *O* является треугольник *ECB* (Рис. 6). По теореме 7.1.1., *EC* = *AB*, *EB* = *AC*, следовательно, треугольник *ECB* равен треугольнику *ABC* по трем сторонам (Ax. 8.5.3.). По аксиоме 6.8. о равенстве фигур, угол *ECB* равен углу *ABC*, угол *CEB* равен углу *BAC*.

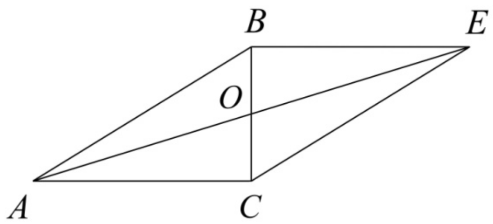

Рисунок 6.

$$\left(\Delta ABC : \left(O \in BC\right) \wedge \left(BO = OC\right)\right)$$
$$\left(Z_O \Delta ABC = \Delta ECB\right) \Rightarrow \left(\text{T.7.1.1.} \because \left(EC = AB\right) \wedge \left(EB = AC\right)\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(\text{Ax.8.5.3.} \because \Delta ABC = \Delta ECB\right) \Rightarrow \left(\text{Ax.6.8.} \because \left(\angle ECB = \angle ABC\right) \wedge \left(\angle CEB = \angle BAC\right)\right)$$

Образом треугольника *ECB* при центральной симметрии относительно точки M_4 – середины отрезка *CE* – будет треугольник *CEH* (Рис. 7): $Z_{M_4}\Delta ECB = \Delta CEH$. По теореме 7.1.1. о сохранении расстояний между двумя точками при центральной симметрии: *CH* = *EB*, *EH* = *CB*, следовательно, треугольник *CEH* равен треугольнику *ECB* по трем сторонам (Ax. 8.5.3.). По аксиоме о равенстве фигур (Ax. 6.8.), угол *ECH* равен углу *CEB*, равному углу *BAC*.

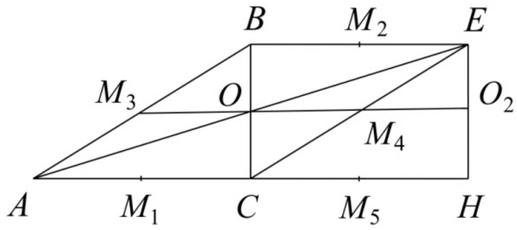

Рисунок 7.

$$\left(\left(Z_C A = H\right) \wedge \left(Z_C M_1 = M_5\right) \wedge \left(Z_{M_4} O = O_2\right)\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(Z_{M_4} \Delta ECB = \Delta CEH\right) \Rightarrow \left(\text{T.7.1.1.} \because \left(CH = EB\right) \wedge \left(EH = CB\right)\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(\text{Ax.8.5.3.} \because \Delta CEH = \Delta ECB\right) \Rightarrow \left(\text{Ax.6.8.} \because \angle ECH = \angle CEB = \angle BAC\right)$$

Углы *ACB*, *BCE* и *ECH* образуют развернутый угол *ACH* (Рис. 7), следовательно, сумма величин углов треугольника *ABC*: $\angle ACB$, $\angle ABC = \angle BCE$ и $\angle BAC = \angle ECH$ равна π (Def. 4.11.).

$$\left(\widehat{ACH} = \widehat{ACB} + \widehat{BCE} + \widehat{ECH} := \pi\right) \Leftrightarrow \left(\widehat{ACB} + \widehat{ABC} + \widehat{BAC} = \pi\right)$$

Для тупоугольного и прямоугольного треугольников построения выполняются так же, как и для остроугольного треугольника, то есть независимо от расположения тупого или прямого угла по отношению к выбранному основанию треугольника.

Сформулируем теорему: Сумма величин внутренних углов в треугольнике равна π. Теорема доказана.

Выводы. Сумма внутренних углов в произвольном треугольнике, равная π, определена с помощью центральной симметрии оптимальным способом – композицией двух центральных симметрий. Использование центральной симметрии является независимым способом определения суммы углов в треугольнике, то есть не использующим аксиому о параллельных прямых, что очень важно для доказательности классической геометрии.

Библиографический список

1. Плисова Н.Н. Определение суммы углов в треугольнике с помощью центральной симметрии // Современные научные исследования и инновации, 2022, № 4 [Электронный ресурс]. URL: https://web.snauka.ru/issues/2022/04/97993
2. Плисова Н.Н. Основания геометрии с дополнениями. – М.: Эдитус, 2023. – 356 с.