

УДК 514.12

**Нахождение квадратуры круга в классической геометрии
с наибольшей точностью и решение обратной задачи**

Плисова Ника Николаевна

Аннотация: С наибольшей точностью найдена квадратура круга в рамках классической геометрии, то есть с помощью простой линейки и циркуля построен квадрат, площадь которого равна площади данного круга. Наиболее точно решена и обратная задача, являющаяся более сложной, – с помощью простой линейки и циркуля построен круг, площадь которого равна площади данного квадрата.

Ключевые слова: квадратура круга, нахождение квадратуры круга, классическая геометрия.

**Construction the quadrature of a circle in classical geometry
with the highest accuracy and solving the inverse problem**

Plisova Nika Nikolaevna

Moscow, Russian Federation

Abstract: The quadrature of a circle has been constructed with the highest accuracy within the framework of classical geometry, that is, using a simple ruler and a compass, the square has been constructed which area is equal to the area of this circle. The inverse problem, which is more complex, has also been most accurately solved – with the help of a simple ruler and a compass, the circle has been constructed which area is equal to the area of the square.

Keywords: quadrature of a circle, construction the quadrature of a circle, classical geometry.

В статье автора [1] была поставлена и решена задача: найти квадратуру круга в рамках классической геометрии. В настоящей статье эта же задача решается с наибольшей точностью.

В классической геометрии все построения выполняются простой линейкой, не имеющей шкалы, и циркулем. Расстояния измеряются раствором циркуля.

Дано: Круг произвольного диаметра (Рис. 1а).

Задача: С помощью простой линейки и циркуля построить квадрат, площадь которого равна площади данного круга.

Решение:

1. Разбиение круга на четыре квадранта.

Если центр окружности, включающей в своей внутренней области данный круг, не задан, то для его нахождения выбираем на окружности три некоторые точки, которые обозначаем через A , F и J . Центром окружности, описанной около треугольника, является точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника (по теореме 8.8.2., [4]). Поэтому строим серединный перпендикуляр n к отрезку AF и серединный перпендикуляр p к отрезку FJ . Точку пересечения прямых n и p обозначаем через O . Точка O является искомым центром окружности. Проводим диаметр AE . Из точки O восставляем перпендикуляр k к прямой AE (порядок построения восставленного к прямой перпендикуляра приведен в [1]). Точки пересечения прямой k с окружностью обозначаем через B и N ; отрезок BN является диаметром окружности. Отрезок OA является радиусом; обозначим его длину через R (Рис. 1б).

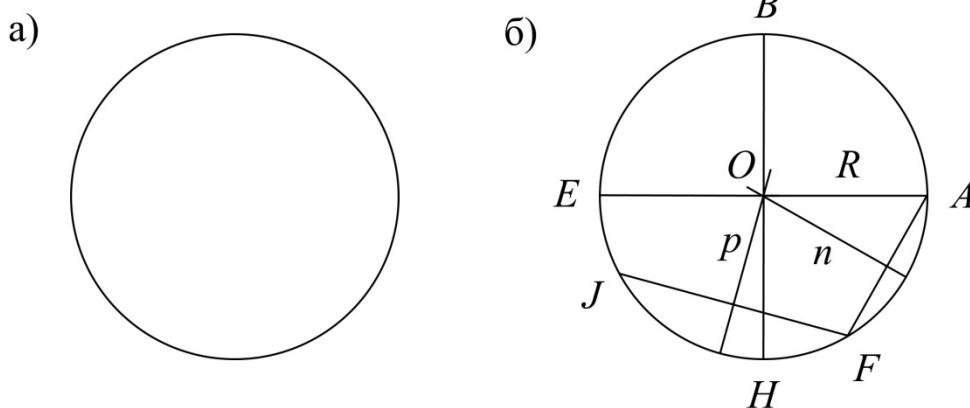


Рисунок 1.

$$\begin{aligned} & ((\{A, F, J\} \subset \omega) \wedge ((n \perp_S AF) \wedge (p \perp_S FJ))) \\ & (n \cap p = O) \Rightarrow (\text{T.8.8.2.} \therefore O : \omega(O; OA) | OA \equiv R) \\ & (AE \equiv \emptyset \omega(O; R)) \\ & (((k \ni O) \wedge (k \perp_r (AE))) | k \cap \omega(O; R) = \{B, N\}) \wedge (BN \equiv \emptyset \omega(O; R))) \end{aligned}$$

При этом круг разбит на четыре квадранта (Рис. 1б).

2. Деление квадранта на четыре равных сектора.

Строим биссектрису прямого угла AOB (порядок построения биссектрисы угла приведен в [1]); обозначим точку пересечения биссектрисы с дугой AB через P (Рис. 2).

Строим биссектрису угла AOP ; обозначим точку пересечения биссектрисы с дугой AP через E (Рис. 2).

Строим биссектрису угла POB ; обозначим точку пересечения биссектрисы с дугой PB через T (Рис. 2).

$$\begin{aligned} & (\beta_{\angle AOB} \equiv OP) \wedge (\beta_{\angle AOP} \equiv OE) \wedge (\beta_{\angle POB} \equiv OT) \\ & (\angle AOE = \angle EOP = \angle POT = \angle TOB = 1/4 \cdot \angle AOB) \end{aligned}$$

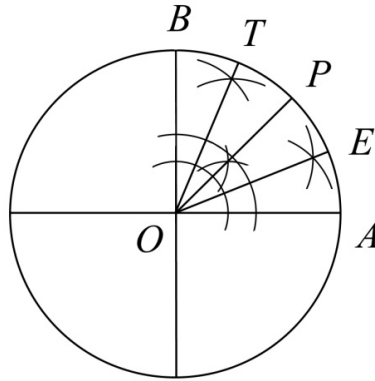


Рисунок 2.

Таким образом, прямой угол AOB разбит на четыре равных угла: AOE , EOP , POT и TOB .

3. Разбиение каждого из углов, составляющих одну четверть прямого, на четыре равных угла.

Рассмотрим угол AOE . Строим его биссектрису OA_2 ; строим биссектрису OA_1 угла AOA_2 ; строим биссектрису OA_3 угла A_2OE (Рис. 3).

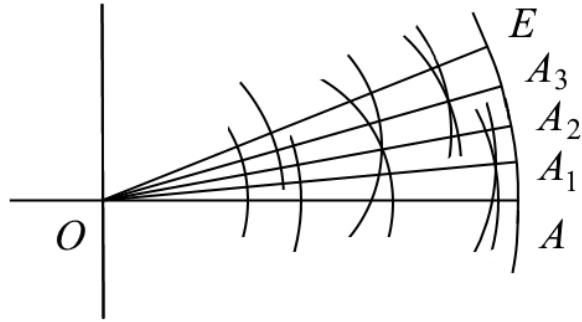


Рисунок 3.

Угол AOE разбит на четыре равных угла: AOA_1 , A_1OA_2 , A_2OA_3 и A_3OE .

$$(\beta_{\angle AOE} \equiv OA_2) \wedge (\beta_{\angle AOA_2} \equiv OA_1) \wedge (\beta_{\angle A_2OE} \equiv OA_3)$$

$$(\angle AOA_1 = \angle A_1OA_2 = \angle A_2OA_3 = \angle A_3OE = 1/4 \cdot \angle AOE)$$

Углы EOP , POT и TOB разбиваются на четыре равных угла таким же способом.

$$(\beta_{\angle EOP} \equiv OE_2) \wedge (\beta_{\angle EOE_2} \equiv OE_1) \wedge (\beta_{\angle E_2OP} \equiv OE_3)$$

$$(\angle EOE_1 = \angle E_1OE_2 = \angle E_2OE_3 = \angle E_3OP = 1/4 \cdot \angle EOP)$$

$$(\beta_{\angle POT} \equiv OP_2) \wedge (\beta_{\angle POP_2} \equiv OP_1) \wedge (\beta_{\angle P_2OT} \equiv OP_3)$$

$$(\angle POP_1 = \angle P_1OP_2 = \angle P_2OP_3 = \angle P_3OT = 1/4 \cdot \angle POT)$$

$$(\beta_{\angle TOB} \equiv OT_2) \wedge (\beta_{\angle TOT_2} \equiv OT_1) \wedge (\beta_{\angle T_2OB} \equiv OT_3)$$

$$(\angle TOT_1 = \angle T_1OT_2 = \angle T_2OT_3 = \angle T_3OB = 1/4 \cdot \angle TOB)$$

В итоге квадрант AOB разбит на 16 равных секторов (Рис. 4а).

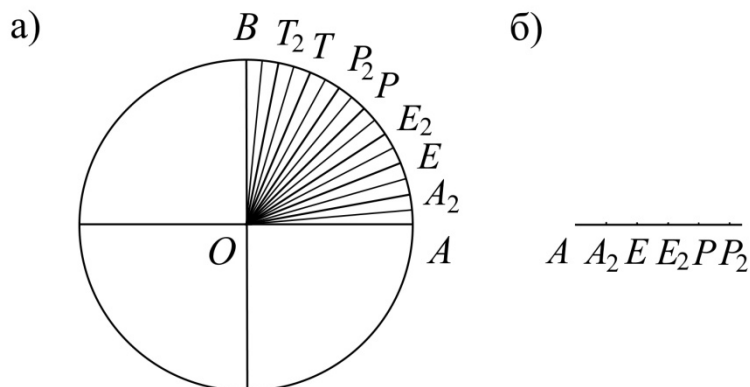


Рисунок 4.

4. Нахождение в рассматриваемом квадранте длины дуги, равной радиусу окружности.

В квадранте AOB от точки A нужно вымерить длину дуги, приблизительно равную радиусу данной в задаче окружности. Раствором циркуля последовательно измеряются длины l_0 хорд, соединяющих точки пересечения дуги AB с лучами, делящими квадрант AOB на 16 равных секторов (Рис. 4а). Измеренные расстояния последовательно откладываются на отдельно проведенном луче от его начала (Рис. 4б, 5). От начальной точки откладывается расстояние R . Длина дуги, приблизительно равная радиусу окружности, определяется с учетом того, что длины l дуг несколько больше длин l_0 хорд: $R \approx (10 + 3/5) \cdot \bar{l}_0 \approx (10 + 1/5) \cdot \bar{l}$, где \bar{l}_0 – средняя длина хорды, стягивающей дугу малого сектора, \bar{l} – средняя длина дуги, ограничивающей малый сектор.

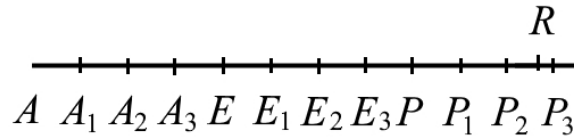


Рисунок 5.

5. Расчет площади круга.

Площадь круга равна: $S_{\circ} = 4 \cdot S_{\triangle AOB} = 4 \cdot 16 \cdot S_{\triangle AOA_1}$, где $S_{\triangle AOB}$ – площадь квадранта AOB ; площадь квадранта AOB равна умноженному на 16 усредненному значению площади малого сектора, который будем обозначать через AOA_1 . Площадь малого сектора равна [2]: $S_{\triangle AOA_1} = 1/2 \cdot \bar{l} \cdot R \approx 1/2 \cdot R^2 / (10 + 1/5)$, где \bar{l} – средняя длина дуги, ограничивающей малый сектор, которая приблизительно равна: $\bar{l} \approx R / (10 + 1/5)$. Тогда площадь круга равна:

$$S_{\circ} \approx 4 \cdot 16 \cdot 1/2 \cdot R^2 / (10 + 1/5) = 160/51 \cdot R^2 = (3 + 7/51) \cdot R^2 \approx (3 + 36/256) \cdot R^2.$$

$$\text{Площадь круга равна: } S_{\circ} \approx \left(3 + (3/8)^2\right) \cdot R^2.$$

6. Построение квадрата, площадь которого равна площади данного круга.

Сторона квадрата, площадь которого равна площади данного круга, равна: $a_{\square} = \sqrt{3 + (3/8)^2} \cdot R$. Порядок умножения длины отрезка на корень квадратный в классической геометрии приведен в статье автора [3], в которой изложен порядок построения прямоугольных треугольников, нужных для нахождения искомым длин отрезков.

Сначала строим прямоугольный треугольник ABC с равными катетами длиной R (Рис. 6а).

Порядок построения прямоугольного треугольника следующий: проводим прямую, обозначаем ее через e ; выбираем на ней некоторую точку, которую обозначаем через A . Раствором циркуля замеряем расстояние R . Откладываем расстояние R на прямой e от точки A , конец отрезка обозначаем через B .

Из точки B восстанавливаем перпендикуляр к прямой e , который обозначаем через c (Рис. 5.2) (порядок построения восстановленного перпендикуляра приведен в статье [1]).

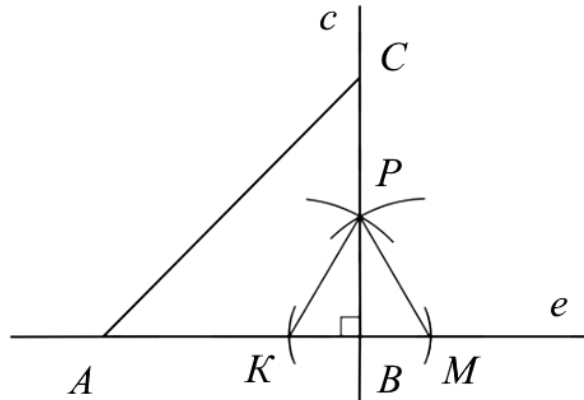


Рисунок 5.2.

От точки B на прямой c откладываем циркулем расстояние R , конец отрезка обозначаем через C . Соединяем отрезком точки A и C . Образуется треугольник ABC , в котором угол B – прямой и стороны AB и BC равны R (Рис. 5.2).

По теореме Пифагора (по теореме 8.3., [4]), которая доказывается в рамках классической геометрии, гипотенуза AC треугольника ABC равна $\sqrt{2}R$.

$$\begin{aligned} & ((A \in e) \wedge (\cup \omega(A; R) \cap e = B)) \\ & ((c \ni B) \wedge (c \perp_r e)) \\ & ((\cup \omega(B; R) \cap c = C) \wedge ([AC] \supset \{A, C\})) \Rightarrow \\ & \Rightarrow (\triangle ABC : (\hat{B} = \pi / 2) \wedge (|AB| = |BC| = R)) \\ & (\text{T.8.3.} \therefore |AC| = \sqrt{2}R) \end{aligned}$$

Строим прямоугольный треугольник $ЕНК$, катет $НК$ которого равен R , а катет $ЕН$ равен $\sqrt{2}R$ (Рис. 6б); для этого замеряется раствором циркуля длина гипотенузы AC построенного перед этим треугольника ABC с равными катетами (Рис. 6а) и откладывается на прямой, на которой лежит сторона $ЕН$ треугольника $ЕНК$. Порядок построения треугольника $ЕНК$ аналогичен порядку построения треугольника ABC .

По теореме Пифагора, гипотенуза EK построенного прямоугольного треугольника EHK равна $\sqrt{3}R$.

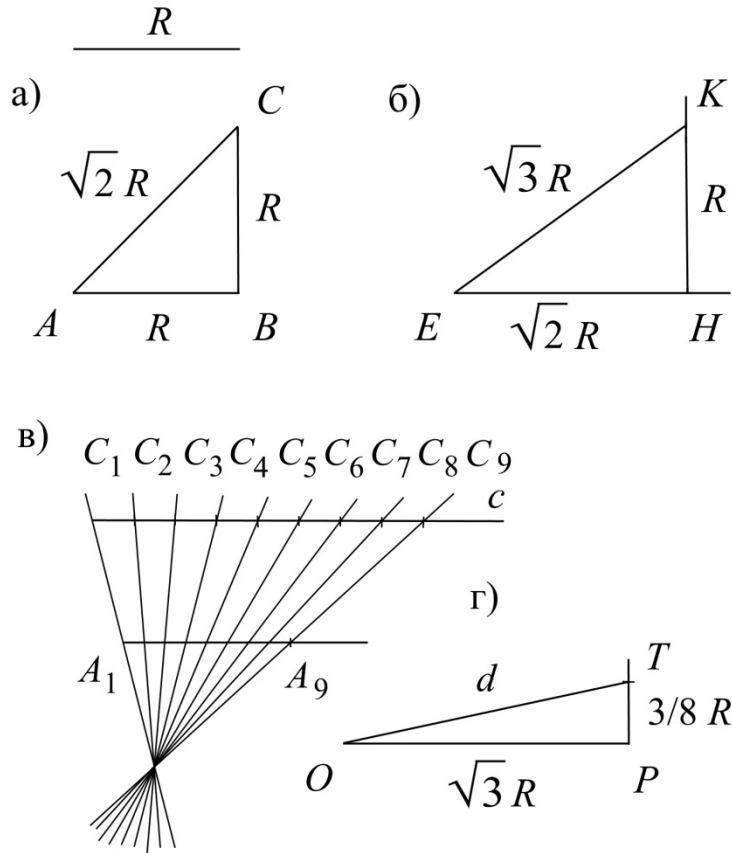


Рисунок 6.

Нужно получить геометрически длину, равную $a_{\square} = \sqrt{3 + (3/8)^2} \cdot R$. Для этого строим прямоугольный треугольник OPT , катет OP которого равен $\sqrt{3}R$, а катет PT равен $3/8 \cdot R$ (Рис. 6г); для этого замеряется раствором циркуля длина $\sqrt{3}R$ гипотенузы EK построенного перед этим треугольника EHK (Рис. 6б) и откладывается на прямой, на которой лежит сторона OP треугольника OPT .

Длина $3/8 \cdot R$ получается путем разбиения отрезка A_1A_9 длиной R на 8 равных частей и замера расстояния A_1A_4 в 3 части: $3/8 \cdot R = |A_1A_4|$ (Рис. 6в); порядок разбиения отрезка на восемь равных частей приведен в Приложении к этой статье; в [4] приведен порядок деления отрезка на n равных частей на примере пяти частей (следствие 6.5.9. теоремы 6.5.5.).

По теореме Пифагора, гипотенуза d треугольника OPT равна: $d = \sqrt{3 + (3/8)^2} \cdot R$.

$$\begin{aligned}
& \left((O \in n) \wedge (\cup \omega(O; \sqrt{3}R) \cap n = P) \right) \\
& \left((p \ni P) \wedge (p \perp_r n) \right) \\
& \left((\cup \omega(P; 3/8 \cdot R) \cap p = T) \wedge ([OT] \supset \{O, T\}) \right) \Rightarrow \\
& \Rightarrow \left(\Delta OPT : (\hat{P} = \pi/2) \wedge (|OP| = \sqrt{3}R) \wedge (|PT| = 3/8 \cdot R) \right) \\
& \left(\text{T.8.3.} \therefore |OT| = \sqrt{3 + (3/8)^2} \cdot R \right)
\end{aligned}$$

Строим квадрат со стороной, равной: $a_{\square} = d = \sqrt{3 + (3/8)^2} \cdot R$ (Рис. 7); длина стороны квадрата замеряется раствором циркуля по гипотенузе d прямоугольного треугольника OPT с катетами, равными $\sqrt{3}R$ и $3/8 \cdot R$ (Рис. 6г).

Квадрат строится следующим образом. Проводим прямую, обозначаем ее через p . На прямой p берем некоторую точку, которую обозначаем через A . Из точки A восставляем перпендикуляр к прямой p , обозначим его через AK . Проводим дугу окружности с центром в точке A и радиусом d , точки пересечения дуги с прямой AK и с прямой p обозначаем через B и D соответственно. Расстояния AB и AD равны d . Из точки D восставляем перпендикуляр к прямой p , обозначим его через DM . От точки D на прямой DM откладываем расстояние d , конец отрезка обозначаем через C . Соединяем отрезком точки B и C , при этом образуется четырехугольник $ABCD$. Прямые AD и BC – равноудаленные и, следовательно, параллельные (по теореме 3.10. [4]); прямые AB и DC параллельны как перпендикулярные одной и той же прямой p (по теореме 3.3., [4]), следовательно, четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом. По второму свойству параллелограмма (по теореме 6.4.2., [4]), стороны AD и BC равны, углы BAD и BCD , углы ABC и ADC равны, следовательно, четырехугольник $ABCD$ является квадратом.

$$\begin{aligned}
& \left((A \in p) \wedge ((AK) \perp_r p) \right) \\
& \left((\cup \omega(A; d) \cap (AK) = B) \wedge (\cup \omega(A; d) \cap p = D) \right) \left(\begin{array}{l} \left(d = \sqrt{3 + (3/8)^2} \cdot R \right) \wedge \\ \wedge (|AB| = |AD| = d) \end{array} \right) \\
& \left(((DM) \perp_r p) \wedge (\cup \omega(D; d) \cap (DM) = C \parallel DC| = d) \wedge ([BC] \supset \{B, C\}) \right) \Rightarrow \\
& \Rightarrow \left(ABCD : (|(AD)(BC)| = const) \wedge (\text{T.3.3.} \therefore (AB) \parallel (DC)) \right) \Rightarrow \\
& \Rightarrow (\text{T.3.10.} \therefore (AD) \parallel (BC)) \Rightarrow (\square ABCD) \Rightarrow \\
& \Rightarrow (\text{T.6.4.2.} \therefore (|AD| = |BC|) \wedge (\widehat{BAD} = \widehat{BCD} = \pi/2) \wedge (\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = \pi/2)) \Rightarrow \\
& \Rightarrow (\square ABCD)
\end{aligned}$$

Площадь квадрата $ABCD$ (Рис. 7) равна площади данного круга:
 $S_{\square} = a_{\square}^2 = \left(3 + (3/8)^2\right) \cdot R^2 \approx S_{\circ}$, то есть построенный квадрат представляет собой решение поставленной задачи.

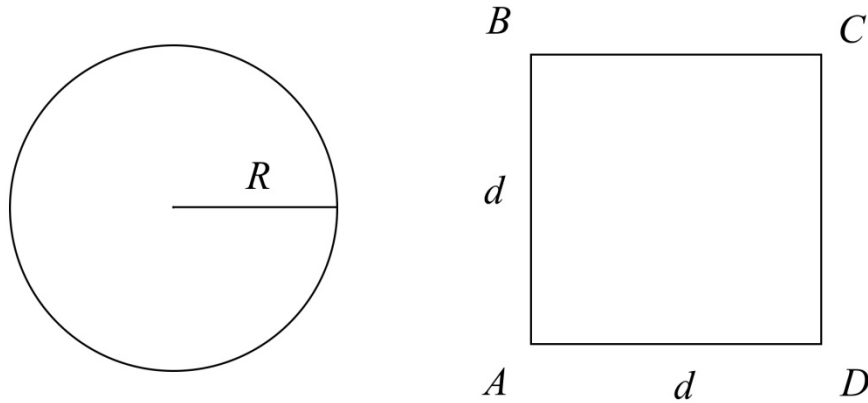


Рисунок 7.

7. Решение обратной задачи – построение круга, площадь которого равна площади данного квадрата.

Дано: Квадрат со стороной a_{\square} некоторой длины b (Рис. 10).

Задача: По правилам классической геометрии построить круг, площадь которого равна площади данного квадрата.

Решение: Из задачи нахождения квадратуры круга следует, что:

$S_{\square} \approx S_{\circ} \Big|_{a_{\square} = \sqrt{3 + (3/8)^2} \cdot R}$, следовательно, для нахождения радиуса искомого круга нужно

провести деление длины b на корень квадратный: $b / \sqrt{3 + (3/8)^2}$. Геометрическое деление длины отрезка на корень квадратный отлично от алгебраического, так как все рассматриваемые отрезки не коллинеарны.

Порядок деления длины отрезка на корень квадратный подробно изложен в статье автора [3]; здесь он будет приводиться кратко, без доказательств, которые приведены в указанной статье.

Сначала нужно построить прямоугольный треугольник, гипотенуза которого пропорциональна $\sqrt{3}$. Для этого берем раствором циркуля некоторое расстояние c . Строим прямоугольный треугольник OPT с равными катетами длиной c (Рис. 8а). По теореме Пифагора, его гипотенуза OT равна $\sqrt{2}c$.

$$\begin{aligned}
& ((O \in n) \wedge (\cup \omega(O; c) \cap n = P)) \\
& ((p \ni P) \wedge (p \perp_r n)) \\
& ((\cup \omega(P; c) \cap p = T) \wedge ([OT] \supset \{O, T\})) \Rightarrow \\
& \Rightarrow (\Delta OPT : (\hat{P} = \pi/2) \wedge (|OP| = |PT| = c)) \\
& (\text{T.8.3.} \therefore |OT| = \sqrt{2}c)
\end{aligned}$$

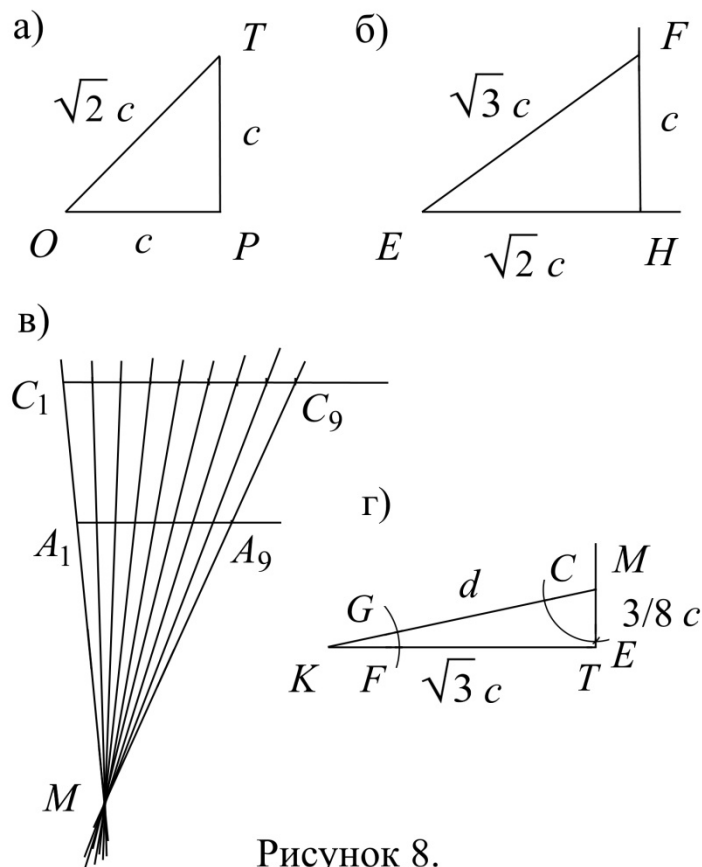


Рисунок 8.

Строим прямоугольный треугольник EHF с катетами длиной c и $\sqrt{2}c$ (Рис. 8б); длина $\sqrt{2}c$ замеряется по гипотенузе OT построенного перед этим треугольником OPT с равными катетами (Рис. 8а). По теореме Пифагора, гипотенуза EF треугольника EHF равна $\sqrt{3}c$.

$$\begin{aligned}
& ((E \in k) \wedge (\cup \omega(E; \sqrt{2}c) \cap k = H)) \\
& ((l \ni H) \wedge (l \perp_r k)) \\
& ((\cup \omega(H; c) \cap l = F) \wedge ([EF] \supset \{E, F\})) \Rightarrow \\
& \Rightarrow (\Delta EHF : (\hat{H} = \pi/2) \wedge (|EH| = \sqrt{2}c) \wedge (|HF| = c)) \\
& (\text{T.8.3.} \therefore |EF| = \sqrt{3}c)
\end{aligned}$$

Чтобы получить длину $\sqrt{3+(3/8)^2} \cdot c$, строим прямоугольный треугольник KTM с катетом KT длиной $\sqrt{3}c$ и катетом TM длиной $3/8 \cdot c$ (Рис. 8г); длина $\sqrt{3}c$ замеряется по гипотенузе EF треугольника EHF с катетами длиной c и $\sqrt{2}c$ (Рис. 8б).

Длина $3/8 \cdot c$ определяется путем разбиения отрезка длиной c на 8 равных частей и замера суммарной длины трех частей (Рис. 8в); порядок разбиения отрезка на 8 равных частей описан в Приложении к этой статье.

По теореме Пифагора, гипотенуза KM треугольника KTM (Рис. 8г) равна $\sqrt{3+(3/8)^2} \cdot c$.

$$\begin{aligned} & \left((K \in n) \wedge (\cup \omega(K; \sqrt{3}c) \cap n = T) \right) \\ & \left((p \ni T) \wedge (p \perp_r n) \right) \\ & \left((\cup \omega(T; 3/8 \cdot c) \cap p = M) \wedge ([KM] \supset \{K, M\}) \right) \Rightarrow \\ & \Rightarrow \left(\Delta KTM : (\hat{T} = \pi/2) \wedge (|KT| = \sqrt{3}c) \wedge (|TM| = 3/8 \cdot c) \right) \\ & \left(\text{Т.8.3.} \therefore |KM| = \sqrt{3+(3/8)^2} \cdot c \right) \end{aligned}$$

Строим прямоугольный треугольник, подобный треугольнику KMT по стороне и двум прилежащим углам, гипотенуза которого равна b . Для этого: проводим прямую p ; берем на ней некоторую точку, которую обозначаем через A ; откладываем от точки A расстояние b , обозначаем конец отрезка через B (Рис. 9а): $|AB| = b$.

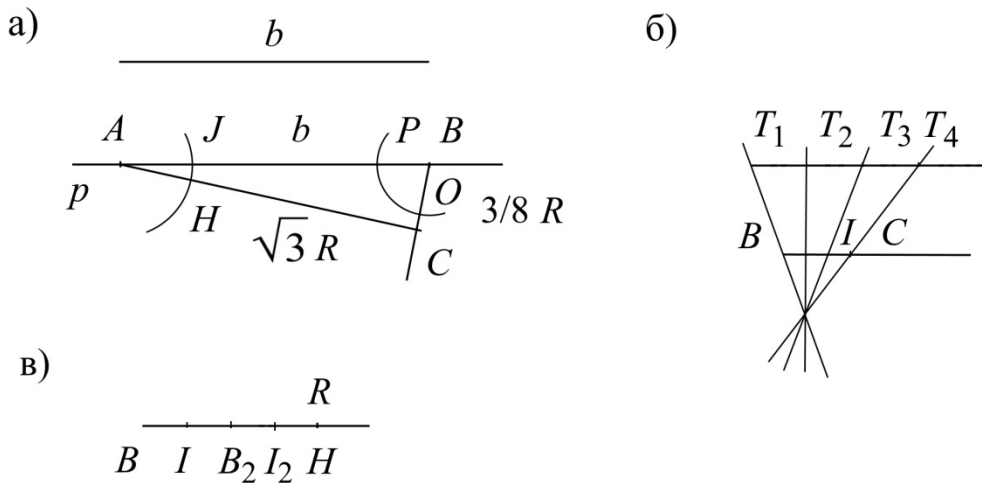


Рисунок 9.

От прямой p строим угол с вершиной в точке B , равный углу KMT : проводим дугу окружности с центром в точке M и некоторым радиусом r ; точки пересечения этой дуги с отрезками KM и MT обозначаем через C и E соответственно (Рис. 8г). Проводим дугу

окружности с центром в точке B и тем же радиусом r ; точку пересечения этой дуги с отрезком AB обозначаем через P . Замеряем раствором циркуля расстояние CE . Проводим дугу окружности с центром в точке P и радиусом CE ; точку пересечения этой дуги с предыдущей дугой обозначаем через O . Через точку O проводим луч с началом в точке B (Рис. 9а).

$$\begin{aligned} & \left((\cup\omega(M;r) \cap KM = C) \wedge (\cup\omega(M;r) \cap MT = E) \right) \\ & (\cup\omega(B;r) \cap AB = P) \\ & \left((\cup\omega(P;|CE|) \cap \cup\omega(B;r) = O) \wedge ([BO] \supset \{B, O\}) \right) \end{aligned}$$

От прямой p в той же полуплоскости строим угол с вершиной в точке A , равный углу MKT : проводим дугу окружности с центром в точке K и некоторым радиусом R ; точки пересечения этой дуги с отрезками KM и KT обозначаем через G и F соответственно (Рис. 8г). Проводим дугу окружности с центром в точке A и тем же радиусом R ; точку пересечения этой дуги с отрезком AB обозначаем через J . Замеряем раствором циркуля расстояние GF . Проводим дугу окружности с центром в точке J и радиусом GF ; точку пересечения этой дуги с предыдущей дугой обозначаем через H . Через точку H проводим луч с началом в точке A (Рис. 9а).

$$\begin{aligned} & \left((\cup\omega(K;R) \cap KM = G) \wedge (\cup\omega(K;R) \cap KT = F) \right) \\ & (\cup\omega(A;R) \cap AB = J) \\ & \left((\cup\omega(J;|GF|) \cap \cup\omega(A;R) = H) \wedge ([AH] \supset \{A, H\}) \right) \end{aligned}$$

Луч AH пересекается с лучом BO , точку их пересечения обозначим через C (Рис. 9а). Образуется треугольник ABC , подобный треугольнику KMT по стороне и двум прилежащим углам (Ах. 8.7.2., [4]) и, следовательно, прямоугольный; его катеты считаем соответственно пропорциональными R . Из определения подобных треугольников (Def. 8.6., [4]) следует, что:

$$|AB|/|KM| = |BC|/|MT|, \quad \text{при этом} \quad |KM| = \sqrt{3 + (3/8)^2} \cdot c, \quad |MT| = 3/8 \cdot c, \quad |AB| = b,$$

следовательно, $|BC| = \frac{3/8 \cdot b}{\sqrt{3 + (3/8)^2}} = 3/8 \cdot R$.

$$\begin{aligned}
& ([AH] \cap [BO] = C) \Rightarrow \\
& \Rightarrow (\Delta ABC : \text{Ax.8.7.2.} \therefore \Delta ABC \sim \Delta KMT | \text{Def.8.3.3.} \therefore \Delta ABC) \Rightarrow \\
& \Rightarrow \left(\text{Def.8.6.} \therefore |AB| / |KM| = |BC| / |MT| \left(\begin{array}{l} (|KM| = \sqrt{3 + (3/8)^2} \cdot c) \wedge \\ \wedge (|MT| = 3/8 \cdot c) \wedge (|AB| = b) \end{array} \right) \right) \Rightarrow \\
& \Rightarrow \left(|BC| = \frac{3/8 \cdot b}{\sqrt{3 + (3/8)^2}} = 3/8 \cdot R \right)
\end{aligned}$$

Нужно геометрически определить длину R . Делим отрезок BC на три равные части (Рис. 9б); порядок разделения отрезка BC на три равные части – тот же, что и порядок разбиения отрезка на восемь равных частей (в Приложении). Длина отрезка BI равна $2/3$ длины отрезка BC . Проводим луч a от некоторой точки, которую обозначим через B ; от точки B последовательно откладываем четыре раза расстояние BI , конечную точку обозначаем через H (Рис. 9в). Длина отрезка BH равна искомому радиусу круга (Рис. 9в).

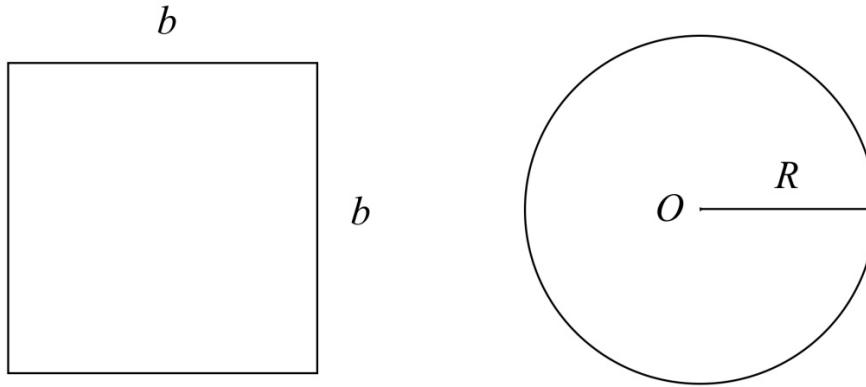


Рисунок 10.

На плоскости выбираем некоторую точку, обозначаем ее через O и проводим окружность с центром в точке O и радиусом R (длиной BH) (Рис. 10). Площадь круга, ограниченного проведенной окружностью, равна площади заданного квадрата, таким образом, задача решена.

$$\begin{aligned}
& (|BC| = 3/8 \cdot R) \Rightarrow (|BI| = 1/4 \cdot R) \Rightarrow \\
& \Rightarrow ([a] : (B \in [a]) \wedge (|BH| = |BI| + |BI| + |BI| + |BI| = R)) \\
& \left(\omega(O; R) : S_{\circ} \approx S_{\square} \left((a_{\square} = b) \wedge \left(R = b / \sqrt{3 + (3/8)^2} \right) \right) \right)
\end{aligned}$$

Приложение.

Разбиение отрезка на восемь равных частей.

Нужно разбить отрезок длиной R на восемь равных отрезков. Проведем прямую a , выберем на ней некоторую точку, которую обозначим через A_1 . От точки A_1 отложим отрезок длиной R , конец отрезка обозначим через A_9 . На произвольном расстоянии от прямой a проводим параллельную ей прямую, обозначаем ее через c ; порядок построения параллельной прямой приведен в [4, п. 3.10.2.]. На прямой c берем произвольную точку C_1 (со стороны точки A_1); от нее откладываем циркулем некоторое расстояние l и обозначаем полученную точку через C_2 , расстояние C_1C_2 равно l ; от точки C_2 откладываем то же самое расстояние l и получаем точку C_3 , расстояние C_2C_3 равно l ; от точки C_3 откладываем то же самое расстояние l и получаем точку C_4 и так далее; от точки C_8 откладываем то же самое расстояние l и получаем точку C_9 , расстояние C_8C_9 равно l . Через точки A_1 и C_1 , точки A_9 и C_9 проводим прямые до их пересечения в точке, которую обозначаем через M . Через точки M и C_2 , M и C_3 и так далее проводим прямые, точки их пересечения с отрезком A_1A_9 обозначаем через $A_1, A_2, \dots, A_7, A_8$ (Рис. 11); эти точки разбивают отрезок A_1A_9 на восемь равных частей.

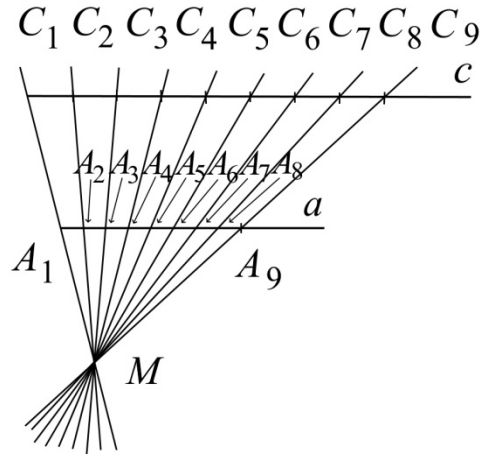


Рисунок 11.

$$\begin{aligned}
& ((A_1 \in a) \wedge (\cup \omega(A_1; R) \cap a = A_9)) \\
& (c \parallel a) \\
& ((C_1 \in c) \wedge (\cup \omega(C_1; l) \cap c = C_2 \parallel |C_1 C_2| = l)) \\
& \left((\cup \omega(C_2; l) \cap c = C_3 \parallel |C_2 C_3| = l) \wedge (\cup \omega(C_3; l) \cap c = C_4 \parallel |C_3 C_4| = l) \wedge \dots \right. \\
& \left. \wedge (\cup \omega(C_7; l) \cap c = C_8 \parallel |C_7 C_8| = l) \wedge (\cup \omega(C_8; l) \cap c = C_9 \parallel |C_8 C_9| = l) \right) \\
& (((A_1 C_1) \supset \{A_1, C_1\}) \wedge ((A_9 C_9) \supset \{A_9, C_9\}) \wedge ((A_1 C_1) \cap (A_9 C_9) = M)) \\
& \left(\left(((MC_2) \supset \{M, C_2\}) \wedge ((MC_2) \cap [A_1 A_9] = A_2) \right) \wedge \right. \\
& \left. \wedge \left(((MC_3) \supset \{M, C_3\}) \wedge ((MC_3) \cap [A_1 A_9] = A_3) \right) \wedge \dots \right. \\
& \left. \wedge \left(((MC_8) \supset \{M, C_8\}) \wedge ((MC_8) \cap [A_1 A_9] = A_8) \right) \right)
\end{aligned}$$

Доказательство: Углы $C_1 C_3 M$ и $A_1 A_3 M$ являются соответственными при пересечении секущей MC_3 параллельных прямых a и c и, следовательно, равными (по теореме 6.2.1., [4]). Углы $C_1 M C_3$ и $A_1 M A_3$ равны по аксиоме о независимости величины угла от длины его сторон (Ах. 4.3.2., [4]). Значит, треугольники $C_1 C_3 M$ и $A_1 A_3 M$ (Рис. 11) подобны по двум углам (Ах. 8.7.2., [4]); коэффициент подобия k может быть определен отношением: $|MC_3|/|MA_3| = k$. Из определения подобия (Def. 6.11., [4]) следует, что: $|C_1 C_2| = k \cdot |A_1 A_2|$, $|C_2 C_3| = k \cdot |A_2 A_3|$, при этом $|C_1 C_2| = |C_2 C_3|$. Отсюда следует, что: $|A_1 A_2| = |A_2 A_3|$.

$$\begin{aligned}
& ((\text{T.6.2.1.} \therefore \angle C_1 C_3 M = \angle A_1 A_3 M) \wedge (\text{Ах.4.3.2.} \therefore \angle C_1 M C_3 = \angle A_1 M A_3)) \Rightarrow \\
& \Rightarrow (\text{Ах.8.7.2.} \therefore \Delta C_1 C_3 M \sim \Delta A_1 A_3 M \parallel |MC_3|/|MA_3| = k) \Rightarrow \\
& \Rightarrow (\text{Def.6.11.} \therefore (|C_1 C_2| = k \cdot |A_1 A_2|) \wedge (|C_2 C_3| = k \cdot |A_2 A_3|) \parallel |C_1 C_2| = |C_2 C_3|) \Rightarrow \\
& \Rightarrow (|A_1 A_2| = |A_2 A_3|)
\end{aligned}$$

Углы $C_3 C_5 M$ и $A_3 A_5 M$ являются соответственными при пересечении секущей MC_5 параллельных прямых a и c и, следовательно, равными (по теореме 6.2.1., [4]). Углы $C_3 M C_5$ и $A_3 M A_5$ равны по аксиоме о независимости величины угла от длины его сторон (Ах. 4.3.2., [4]). Значит, треугольники $C_3 C_5 M$ и $A_3 A_5 M$ (Рис. 11) подобны по двум углам (Ах. 8.7.2., [4]); коэффициент подобия k_2 может быть определен отношением: $k_2 = |MC_5|/|MA_5| = k$ – в силу подобия треугольников $C_1 C_3 M$ и $A_1 A_3 M$. Из определения подобия (Def. 6.11., [4]) следует, что: $|C_3 C_4| = k \cdot |A_3 A_4|$, $|C_4 C_5| = k \cdot |A_4 A_5|$, при этом $|C_3 C_4| = |C_4 C_5|$. Следовательно: $|A_3 A_4| = |A_4 A_5|$. Так как $|C_3 C_4| = |C_2 C_3|$, то, по определению подобия (Def. 6.11.): $|A_3 A_4| = |A_2 A_3|$.

$$\begin{aligned}
& ((\text{T.6.2.1.} \therefore \angle C_3 C_5 M = \angle A_3 A_5 M) \wedge (\text{Ax.4.3.2.} \therefore \angle C_3 M C_5 = \angle A_3 M A_5)) \Rightarrow \\
& \Rightarrow (\text{Ax.8.7.2.} \therefore \Delta C_3 C_5 M \sim \Delta A_3 A_5 M \mid k_2 = |MC_3| / |MA_3| = k) \Rightarrow \\
& \Rightarrow (\text{Def.6.11.} \therefore (|C_3 C_4| = k \cdot |A_3 A_4|) \wedge (|C_4 C_5| = k \cdot |A_4 A_5|) \parallel |C_3 C_4| = |C_4 C_5|) \Rightarrow \\
& \Rightarrow (|A_3 A_4| = |A_4 A_5| \parallel |C_3 C_4| = |C_2 C_3|) \Rightarrow (|A_3 A_4| = |A_2 A_3|)
\end{aligned}$$

Углы $C_5 C_7 M$ и $A_5 A_7 M$ являются соответственными при пересечении секущей MC_7 параллельных прямых a и c и, следовательно, равными (по теореме 6.2.1., [4]). Углы $C_5 M C_7$ и $A_5 M A_7$ равны по аксиоме о независимости величины угла от длины его сторон (Ах. 4.3.2., [4]). Значит, треугольники $C_5 C_7 M$ и $A_5 A_7 M$ (Рис. 11) подобны по двум углам (Ах. 8.7.2., [4]); коэффициент подобия k_3 может быть определен отношением: $k_3 = |MC_5| / |MA_5| = |MC_3| / |MA_3| = k$ – в силу подобия треугольников $C_3 C_5 M$ и $A_3 A_5 M$. Из определения подобия (Def. 6.11., [4]) следует, что: $|C_5 C_6| = k \cdot |A_5 A_6|$, $|C_6 C_7| = k \cdot |A_6 A_7|$, при этом $|C_5 C_6| = |C_6 C_7|$. Следовательно: $|A_5 A_6| = |A_6 A_7|$. Так как $|C_5 C_6| = |C_4 C_5|$, то, по определению подобия (Def. 6.11.): $|A_5 A_6| = |A_4 A_5|$.

$$\begin{aligned}
& ((\text{T.6.2.1.} \therefore \angle C_5 C_7 M = \angle A_5 A_7 M) \wedge (\text{Ax.4.3.2.} \therefore \angle C_5 M C_7 = \angle A_5 M A_7)) \Rightarrow \\
& \Rightarrow (\text{Ax.8.7.2.} \therefore \Delta C_5 C_7 M \sim \Delta A_5 A_7 M \mid k_3 = |MC_5| / |MA_5| = |MC_3| / |MA_3| = k) \Rightarrow \\
& \Rightarrow (\text{Def.6.11.} \therefore (|C_5 C_6| = k \cdot |A_5 A_6|) \wedge (|C_6 C_7| = k \cdot |A_6 A_7|) \parallel |C_5 C_6| = |C_6 C_7|) \Rightarrow \\
& \Rightarrow (|A_5 A_6| = |A_6 A_7| \parallel |C_5 C_6| = |C_4 C_5|) \Rightarrow (|A_5 A_6| = |A_4 A_5|)
\end{aligned}$$

Углы $C_7 C_9 M$ и $A_7 A_9 M$ являются соответственными при пересечении секущей MC_9 параллельных прямых a и c и, следовательно, равными (по теореме 6.2.1., [4]). Углы $C_7 M C_9$ и $A_7 M A_9$ равны по аксиоме о независимости величины угла от длины его сторон (Ах. 4.3.2., [4]). Значит, треугольники $C_7 C_9 M$ и $A_7 A_9 M$ (Рис. 11) подобны по двум углам (Ах. 8.7.2., [4]); коэффициент подобия k_4 может быть определен отношением: $k_4 = |MC_7| / |MA_7| = |MC_5| / |MA_5| = k$ – в силу подобия треугольников $C_5 C_7 M$ и $A_5 A_7 M$. Из определения подобия (Def. 6.11., [4]) следует, что: $|C_7 C_8| = k \cdot |A_7 A_8|$, $|C_8 C_9| = k \cdot |A_8 A_9|$, при этом $|C_7 C_8| = |C_8 C_9|$. Следовательно: $|A_7 A_8| = |A_8 A_9|$. Так как $|C_7 C_8| = |C_6 C_7|$, то, по определению подобия (Def. 6.11.): $|A_7 A_8| = |A_6 A_7|$.

$$\begin{aligned}
& ((\text{T.6.2.1.} \therefore \angle C_7 C_9 M = \angle A_7 A_9 M) \wedge (\text{Ax.4.3.2.} \therefore \angle C_7 M C_9 = \angle A_7 M A_9)) \Rightarrow \\
& \Rightarrow (\text{Ax.8.7.2.} \therefore \Delta C_7 C_9 M \sim \Delta A_7 A_9 M \mid k_4 = |MC_7| / |MA_7| = |MC_5| / |MA_5| = k) \Rightarrow \\
& \Rightarrow (\text{Def.6.11.} \therefore (|C_7 C_8| = k \cdot |A_7 A_8|) \wedge (|C_8 C_9| = k \cdot |A_8 A_9|) \parallel |C_7 C_8| = |C_8 C_9|) \Rightarrow \\
& \Rightarrow (|A_7 A_8| = |A_8 A_9| \parallel |C_7 C_8| = |C_6 C_7|) \Rightarrow (|A_7 A_8| = |A_6 A_7|)
\end{aligned}$$

Выводы. В рамках классической геометрии найдена квадратура круга с наибольшей точностью, то есть с помощью простой линейки и циркуля построен квадрат, площадь которого равна площади данного круга. Наиболее точно решена и обратная задача, являющаяся более сложной, – с помощью простой линейки и циркуля построен круг, площадь которого равна площади данного квадрата.

Библиографический список

1. Плисова Н.Н. Нахождение квадратуры круга в классической геометрии и решение обратной задачи // Современные научные исследования и инновации, 2022, № 10 [Электронный ресурс]. URL: <https://web.snauka.ru/issues/2022/10/98924>
2. Выгодский М.Я. Справочник по элементарной математике. – М.: АСТ: Астрель, 2006. – 509 с.
3. Плисова Н.Н. Умножение и деление длины отрезка на корни квадратные в классической геометрии // Современные научные исследования и инновации. 2022, № 10 [Электронный ресурс]. URL: <https://web.snauka.ru/issues/2022/10/98923>
4. Плисова Н.Н. Основания геометрии. – 5-е изд. – М.: Эдитус, 2023. – 284 с.