УДК 514.12

Точное деление угла и дуги окружности на три равные части и на большее число равных частей в классической геометрии

Плисова Ника Николаевна

Аннотация: Разработан способ точного деления угла и дуги окружности на три равные части по правилам классической геометрии, то есть с помощью простой линейки и циркуля. Этот способ деления угла на три равные части применим к острым и тупым углам любой величины. Разработанным способом осуществляется деление по правилам классической геометрии угла и дуги окружности на пять и на большее число равных частей, причем как острого, так и тупого угла. Результаты деления, проверенные с помощью транспортира, точные. Задачи деления угла и дуги окружности на несколько равных частей взаимосвязаны и решаются одновременно.

Ключевые слова: точное деление угла на три равные части, точное деление дуги окружности на три равные части, точное деление угла на пять равных частей, точное деление дуги окружности на пять равных частей, классическая геометрия.

Exact division of an angle and an arc of a circle into three equal parts and into a greater number of equal parts in classical geometry

Plisova Nika Nikolaevna
Moscow, Russian Federation

Abstract: A method has been developed for accurately dividing an angle and an arc of a circle into three equal parts according to the rules of classical geometry, that is, using a simple ruler and a compass. This method of dividing an angle into three equal parts is applicable to acute and obtuse angles of any magnitude. The developed method divides an angle and an arc of a circle according to the rules of classical geometry into five or more equal parts, both acute and obtuse angles. The division results, verified with a protractor, are accurate. The tasks of dividing the angle and the arc of a circle into several equal parts are interrelated and are solved simultaneously.

Keywords: exact division of an angle into three equal parts, exact division of an arc of a circle into three equal parts, exact division of an angle into five equal parts, exact division of an arc of a circle into five equal parts, classical geometry.

Задачи точного деления угла и дуги окружности на три равные части по правилам классической геометрии взаимосвязаны и решаются одновременно.

В классической геометрии все построения выполняются простой линейкой, не имеющей шкалы, и циркулем; расстояния измеряются раствором циркуля.

Вывод равенства построенных углов основывается на аксиоматике планиметрии, которая приведена в книге автора [1] и не приводится заново в этой статье.

1. Способ точного деления угла и дуги окружности на три равные части по правилам классической геометрии.

Дано: угол произвольной величины, заданный геометрически.

Задача: с помощью простой линейки и циркуля разделить данный угол на три равные части.

Решение: Пускай угол с вершиной в точке O образован лучами a и c. Проводим дугу окружности с центром в точке O и некоторым радиусом R; точки ее пересечения с лучами a и c, являющимися сторонами данного угла, обозначаем через A и C соответственно (Рис. 1).

Проводим дугу окружности с центром в точке O и радиусом $2R$; точку ее пересечения с лучом a обозначаем через B (до луча c эту дугу не доводим). Соотношение между радиусами второй и первой окружностей может быть и другим; удвоение радиуса наиболее просто и удобно, для чего на луче a от точки A откладывается расстояние R, конец отрезка обозначается через B. На дуге окружности с центром в точке O и радиусом $2R$ от точки B последовательно откладываем три раза некоторое расстояние n: раствором циркуля последовательно откладываются хорды длиной n, не достигая луча c; концы отложенных отрезков обозначаются через B_1, B_2 и B_3 (Рис. 1). По теореме 5.2.4., длины дуг BB_1, B_1B_2 и B_2B_3, которые стягивают равные хорды BB_1, B_1B_2 и B_2B_3, равны.

Через точки C и B_3 проводим прямую; луч a продолжаем по прямой до пересечения его с прямой CB_3, точку пересечения обозначаем через P. Проводим прямую через точки P и B_1, точку ее пересечения с дугой AC обозначаем через A_1; проводим прямую через точки P и B_2, точку ее пересечения с дугой AC обозначаем через A_2 (Рис. 1).

Через точку A_1 проводим луч с началом в точке O; через точку A_2 проводим луч с началом в точке O. Лучи OA_1 и OA_2 разбивают угол AOC на три равные части (Рис. 1).

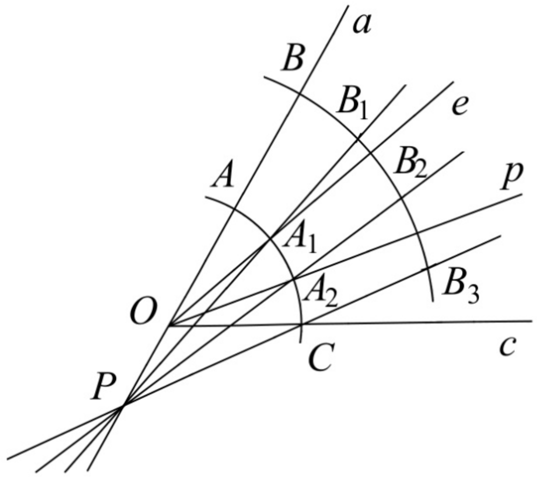

Рисунок 1.

$$\left(\angle(ac)\middle|[a)\cap[c)=O\right)$$
$$\left(\cup\omega(O;R)\cap[a)=A\right)\wedge\left(\cup\omega(O;R)\cap[c)=C\right)$$
$$\left(\cup\omega(O;k\cdot R)\cap[a)=B\right)$$
$$\left(\cup\omega(B;n)\cap\cup\omega(O;k\cdot R)=B_1\right)\wedge\left(\cup\omega(B_1;n)\cap\cup\omega(O;k\cdot R)=B_2\right)\wedge$$
$$\wedge\left(\cup\omega(B_2;n)\cap\cup\omega(O;k\cdot R)=B_3\right)$$
$$\left((CB_3)\supset\{C,B_3\}\right)\wedge\left((OA)\supset[a)\right)\wedge\left((CB_3)\cap(OA)=P\right)$$
$$\left((PB_1)\supset\{P,B_1\}\middle|(PB_1)\cap\cup\omega(O;R)=A_1\right)\wedge$$
$$\wedge\left((PB_2)\supset\{P,B_2\}\middle|(PB_2)\cap\cup\omega(O;R)=A_2\right)$$
$$\left(\left([OA_1)\ni A_1\right)\wedge\left([OA_2)\ni A_2\right)\right)\Rightarrow\left(\angle AOA_1=\angle A_1OA_2=\angle A_2OC=1/3\cdot\angle AOC\right)$$

Действительно, хорды BB_1, B_1B_2, B_2B_3 равны: $|BB_1|=|B_1B_2|=|B_2B_3|=n$, следовательно, по теореме 5.2.4. (доказанной в п. 2. этой статьи), длины соответствующих дуг тоже равны: $l_{\cup BB_1}=l_{\cup B_1B_2}=l_{\cup B_2B_3}$.

Окружности с центром в точке O и радиусами R и $k{\cdot}R$ являются концентрическими (Def. 5.15.1.), где $k=|OB|/|OA|$; дуги BB_3 и AC параллельны по определению параллельных кривых, данному в [3]. По аксиоме 4.3.2. о независимости величины угла от длины его сторон, угол APA_1 равен углу BPB_1, угол A_1PA_2 равен углу B_1PB_2, угол A_2PC равен углу B_2PB_3 (Рис. 1): $\widehat{APA_1}=\widehat{BPB_1}$, $\widehat{A_1PA_2}=\widehat{B_1PB_2}$, $\widehat{A_2PC}=\widehat{B_2PB_3}$, при этом длины дуг BB_1, B_1B_2, B_2B_3, ограниченных сторонами углов BPB_1, B_1PB_2, B_2PB_3, равны: $l_{\cup BB_1}=l_{\cup B_1B_2}=l_{\cup B_2B_3}$, следовательно, длины дуг AA_1, A_1A_2 и A_2C, ограниченных сторонами углов APA_1, A_1PA_2 и A_2PC, тоже равны по аксиоме 6.7. о равенстве фигур: $l_{\cup AA_1} = l_{\cup A_1A_2} = l_{\cup A_2C}$. Значит, дуга AC разбита на три равные части (Рис. 1); таким образом решена задача разделения дуги окружности на три равные части.

Длина дуги окружности равна произведению радиуса окружности на угловую величину дуги, выраженную в радианах [2]: $l_{\cup AA_1} = \widehat{AA_1} \cdot R$, $l_{\cup A_1A_2} = \widehat{A_1A_2} \cdot R$, $l_{\cup A_2C} = \widehat{A_2C} \cdot R$; угловая величина дуги равна величине центрального угла, стороны которого ограничивают эту дугу. Из равенства длин дуг AA_1, A_1A_2 и A_2C следует равенство их угловых величин: $\widehat{AA_1} = \widehat{A_1A_2} = \widehat{A_2C}$. Равенство угловых величин дуг AA_1, A_1A_2 и A_2C означает равенство соответствующих им центральных углов (Рис. 1): $\widehat{AOA_1} = \widehat{A_1OA_2} = \widehat{A_2OC}$; величина каждого из них равна 1/3 величины угла AOC (по аксиоме 4.7.1.).

$$\left(|BB_1| = |B_1B_2| = |B_2B_3| = n\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(\text{T.5.2.4.} \because l_{\cup BB_1} = l_{\cup B_1B_2} = l_{\cup B_2B_3}\right)$$
$$\left(\text{Def.5.15.1.} \because \omega(O;R) \wedge \omega(O;k \cdot R) \middle| k = |OB| / |OA|\right) \wedge \left(\cup BB_3 \parallel \cup AC\right)$$
$$\left(\text{Ax.4.3.2.} \because \left(\widehat{APA_1} = \widehat{BPB_1}\right) \wedge \left(\widehat{A_1PA_2} = \widehat{B_1PB_2}\right) \middle| l_{\cup BB_1} = l_{\cup B_1B_2}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(\text{Ax.6.7.} \because l_{\cup AA_1} = l_{\cup A_1A_2}\right)$$
$$\left(\text{Ax.4.3.2.} \because \left(\widehat{A_1PA_2} = \widehat{B_1PB_2}\right) \wedge \left(\widehat{A_2PC} = \widehat{B_2PB_3}\right) \middle| l_{\cup B_1B_2} = l_{\cup B_2B_3}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(\text{Ax.6.7.} \because l_{\cup A_1A_2} = l_{\cup A_2C}\right) \Rightarrow \left(\text{Ax.6.7.} \because l_{\cup AA_1} = l_{\cup A_1A_2} = l_{\cup A_2C}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(l_{\cup AA_1} = l_{\cup A_1A_2} = l_{\cup A_2C} = 1/3 \cdot l_{\cup AC}\right)$$
$$\left(\begin{array}{l} \left(l_{\cup AA_1} = \widehat{AA_1} \cdot R\right) \wedge \left(l_{\cup A_1A_2} = \widehat{A_1A_2} \cdot R\right) \wedge \\ \wedge \left(l_{\cup A_2C} = \widehat{A_2C} \cdot R\right) \middle| l_{\cup AA_1} = l_{\cup A_1A_2} = l_{\cup A_2C} \end{array}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(\widehat{AA_1} = \widehat{A_1A_2} = \widehat{A_2C}\right) \Leftrightarrow \left(\widehat{AOA_1} = \widehat{A_1OA_2} = \widehat{A_2OC}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(\text{Ax.4.7.1.} \because \widehat{AOA_1} = \widehat{A_1OA_2} = \widehat{A_2OC} = 1/3 \cdot \widehat{AOC}\right)$$

2. Доказательства теоремы о равенстве длин дуг при равенстве стягивающих их хорд и обратной теоремы.

Теорема 5.2.4.: Если длины хорд, стягивающих дуги окружностей равного радиуса, равны, то равны и длины этих дуг.

Доказательство: Пускай длины хорд AB и CE, стягивающих соответствующие дуги окружности с центром в точке O и радиусом r, равны (Рис. 2). Тогда треугольники AOB и

COE равны по трем сторонам (Ах. 8.5.3.), следовательно, углы *AOB* и *COE* равны по аксиоме о равенстве фигур (Ах. 6.8.).

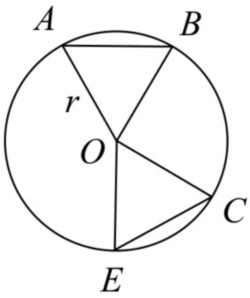

Рисунок 2.

Длина дуги окружности равна произведению ее угловой величины, выраженной в радианах, на радиус окружности [2]; угловая величина дуги равна величине центрального угла, ограничивающего эту дугу. Длина дуги *AB* равна: $l_{\cup AB} = \widehat{AB} \cdot r = \widehat{AOB} \cdot r$; длина дуги *CE* равна: $l_{\cup CE} = \widehat{CE} \cdot r = \widehat{COE} \cdot r$; при этом $\widehat{AOB} = \widehat{COE}$, следовательно, длины дуг *AB* и *CE* равны: $l_{\cup AB} = l_{\cup CE}$, что и требовалось доказать.

$$\Big(\big(\cup AB \subset \omega(O;r)\big) \wedge \big(\cup CE \subset \omega(O;r)\big) \Big| |AB| = |CE|\Big)$$

$$\big(\text{Ах.}8.5.3. \because \Delta AOB = \Delta COE\big) \Rightarrow \Big(\text{Ах.}6.8. \because \widehat{AOB} = \widehat{COE}\Big)$$

$$\left(\begin{array}{l} \begin{cases} l_{\cup AB} = \widehat{AB} \cdot r = \widehat{AOB} \cdot r \\ l_{\cup BC} = \widehat{CE} \cdot r = \widehat{COE} \cdot r \end{cases} \\ \widehat{AOB} = \widehat{COE} \end{array}\right) \Rightarrow \left(l_{\cup AB} = l_{\cup CE}\right)\square$$

Теорема 5.2.5., обратная теореме 5.2.4.: Если длины дуг окружностей равного радиуса равны, то равны и длины хорд, стягивающих эти дуги.

Доказательство: Пускай длины дуг *AB* и *CE* окружности с центром в точке *O* и радиусом *r* равны (Рис. 2). Длина дуги *AB* равна: $l_{\cup AB} = \widehat{AB} \cdot r = \widehat{AOB} \cdot r$; длина дуги *CE* равна: $l_{\cup CE} = \widehat{CE} \cdot r = \widehat{COE} \cdot r$; при этом $l_{\cup AB} = l_{\cup CE}$, следовательно, $\widehat{AOB} = \widehat{COE}$. Тогда треугольники *AOB* и *COE* равны по двум сторонам и углу между ними (Ах. 8.5.1.), следовательно, хорды *AB* и *CE* равны по аксиоме о равенстве фигур (Ах. 6.8.), что и требовалось доказать.

$$\left(l_{\cup AB} = l_{\cup CE} \middle| \left(\cup AB \subset \omega(O;r)\right) \wedge \left(\cup CE \subset \omega(O;r)\right)\right)$$

$$\left(\left(l_{\cup AB} = \widehat{AB} \cdot r = \widehat{AOB} \cdot r\right) \wedge \left(l_{\cup CE} = \widehat{CE} \cdot r = \widehat{COE} \cdot r\right) \middle| l_{\cup AB} = l_{\cup CE}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\widehat{AOB} = \widehat{COE}\right) \Rightarrow \left(\text{Ax.8.5.1.} \because \Delta AOB = \Delta COE\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\text{Ax.6.8.} \because |AB| = |CE|\right) \square$$

3. Примеры точного деления острых углов разной величины на три равные части.

Предложенный способ деления угла на три равные части применен к углам в 30°, 45°, 60° и 90°. Эти углы строились с помощью транспортира; деление каждого из них на три равные части проводилось только с помощью простой линейки и циркуля; результаты деления проверялись с помощью транспортира, при этом было установлено, что результаты деления – точные.

На рисунке 2 угол AOC равен 60° и разделен на три части лучами e и p; радиус OB в 2 раза больше радиуса OA. Углы AOA_1, A_1OA_2 и A_2OC равны; величина каждого из них равна 20°, то есть 1/3 величины угла AOC. При этом дуга AC также разделена на три равные части: AA_1, A_1A_2 и A_2C.

На рисунке 3 угол AOC равен 30° и разделен на три части лучами e и p; радиус OB в 2 раза больше радиуса OA. Углы AOA_1, A_1OA_2 и A_2OC равны; величина каждого из них равна 10°, то есть 1/3 величины угла AOC. При этом дуга AC также разделена на три равные части: AA_1, A_1A_2 и A_2C.

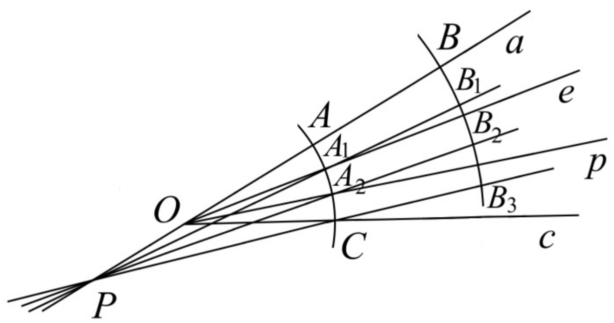

Рисунок 3.

На рисунке 4 угол AOC равен 45° и разделен на три части лучами e и p; радиус OB в 2 раза больше радиуса OA. Углы AOA_1, A_1OA_2 и A_2OC равны; величина каждого из них равна 15°, то есть 1/3 величины угла AOC. При этом дуга AC также разделена на три равные части: AA_1, A_1A_2 и A_2C.

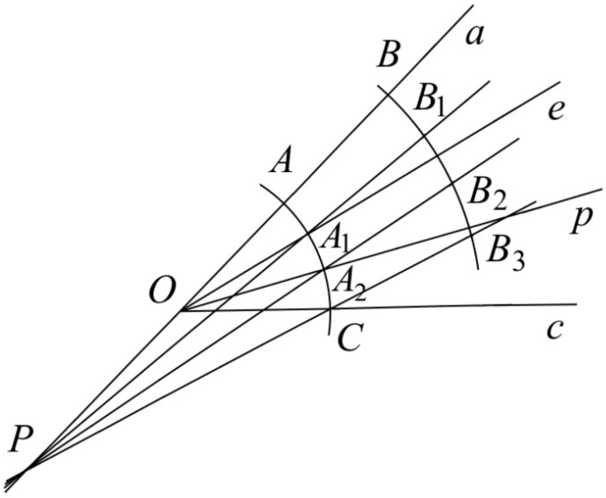

Рисунок 4.

На рисунке 5 угол *AOC* равен 90° и разделен на три части лучами *e* и *p*; радиус *OB* в 2 раза больше радиуса *OA*. Углы AOA_1, A_1OA_2 и A_2OC равны; величина каждого из них равна 30°, то есть 1/3 величины угла *AOC*. При этом дуга *AC* также разделена на три равные части: AA_1, A_1A_2 и A_2C.

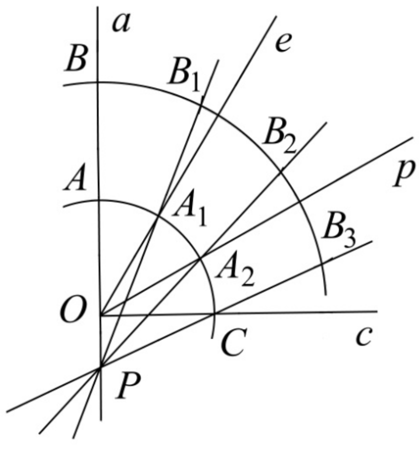

Рисунок 5.

Предложенным способом осуществляется деление угла на три равные части, когда отношение радиусов концентрических окружностей отлично от 2. На рисунке 6 представлен угол *AOC* в 60°, при этом радиус *OB* в 1,5 раза больше радиуса *OA*. Углы AOA_1, A_1OA_2 и A_2OC равны; величина каждого из них равна 20°, то есть 1/3 величины угла *AOC*. При этом дуга *AC* также разделена на три равные части: AA_1, A_1A_2 и A_2C.

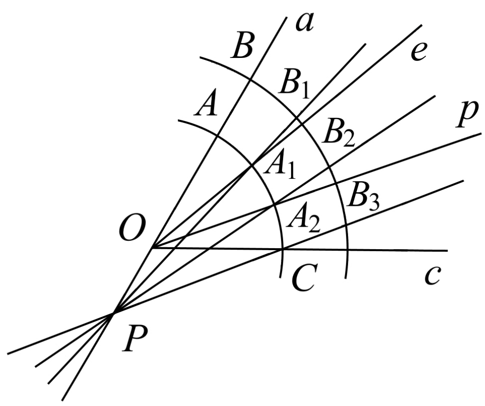

Рисунок 6.

4. Точное деление тупого угла и соответствующей дуги окружности на три равные части по правилам классической геометрии.

Деление тупого угла на три равные части осуществляется тем же самым способом, что и деление острого угла; при этом обоснование равенства частей остается в силе. Деление тупого угла на три равные части осуществлено на примере угла в 120° (Рис. 7); радиус *OB* в 2 раза больше радиуса *OA*.

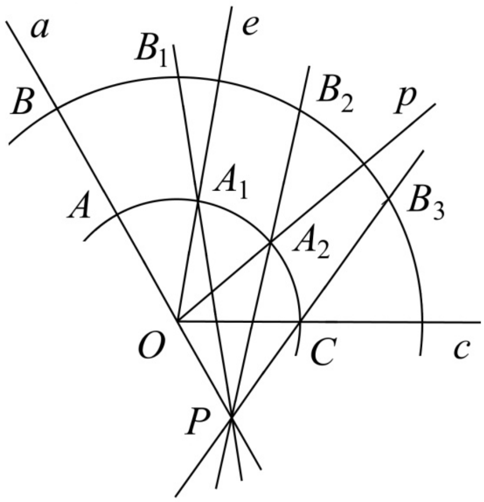

Рисунок 7.

На рисунке 7 угол *AOC* разделен лучами *e* и *p* на три угла AOA_1, A_1OA_2 и A_2OC; величина каждого из них равна 40°, то есть 1/3 величины угла *AOC*. При этом дуга *AC*, ограниченная сторонами исходного угла, тоже разделена на три равные части: AA_1, A_1A_2 и A_2C.

5. Точное деление угла и дуги окружности на пять равных частей по правилам классической геометрии.

Предложенным способом осуществляется деление угла на пять равных частей, только в отличие от деления угла на три равные части, на дуге окружности с центром в точке O и радиусом $2R$ от точки B последовательно откладывается некоторое расстояние s пять раз, то есть раствором циркуля последовательно откладываются хорды длиной s, не достигая луча c; концы отложенных отрезков обозначаются через B_1, B_2, B_3, B_4 и B_5 (Рис. 8). По теореме 5.2.4., длины дуг BB_1, B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4, B_4B_5, которые стягивают равные хорды BB_1, B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4 и B_4B_5, равны.

Через точки C и B_5 проводится прямая; луч a продолжается по прямой до пересечения его с прямой CB_5, точка пересечения обозначается через P. Затем проводятся прямые через точки P и B_1, точки P и B_2, точки P и B_3, точки P и B_4; точки пересечения этих прямых с дугой AC обозначаются через A_1, A_2, A_3, A_4 соответственно (Рис. 8).

Через точки A_1, A_2, A_3, A_4 проводятся лучи с началом в точке O, которые разбивают угол AOC на пять равных частей; лучи обозначены через e, p, n и d (Рис. 8). При этом дуга AC тоже оказывается разделенной на пять равных частей: AA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 и A_4C.

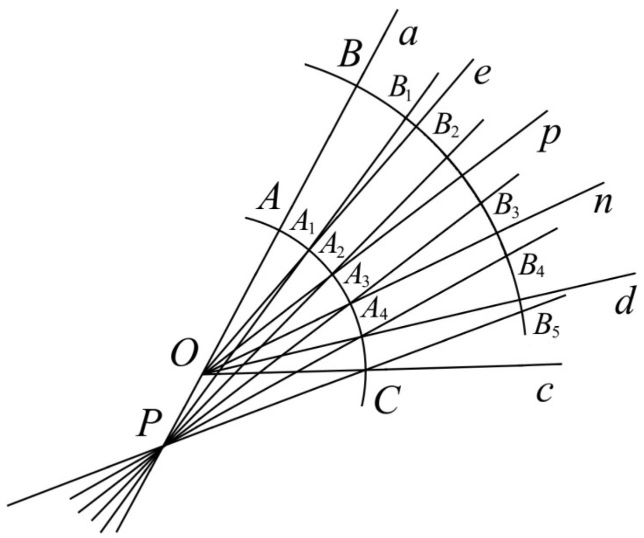

Рисунок 8.

$$\left(\angle(ac)\big|[a)\cap[c)=O\right)$$
$$\left(\cup\omega(O;R)\cap[a)=A\right)\wedge\left(\cup\omega(O;R)\cap[c)=C\right)$$
$$\left(\cup\omega(O;2R)\cap[a)=B\right)$$
$$\left(\cup\omega(B;s)\cap\cup\omega(O;2R)=B_1\right)\wedge\left(\cup\omega(B_1;s)\cap\cup\omega(O;2R)=B_2\right)\wedge$$
$$\wedge\left(\cup\omega(B_2;s)\cap\cup\omega(O;2R)=B_3\right)\wedge\left(\cup\omega(B_3;s)\cap\cup\omega(O;2R)=B_4\right)\wedge$$
$$\wedge\left(\cup\omega(B_4;s)\cap\cup\omega(O;2R)=B_5\right)$$
$$\begin{pmatrix}\text{T.5.2.4.}\because l_{\cup BB_1}=l_{\cup B_1B_2}=l_{\cup B_2B_3}=l_{\cup B_3B_4}= \\ =l_{\cup B_4B_5}\big||BB_1|=|B_1B_2|=|B_2B_3|=|B_3B_4|=|B_4B_5|=s\end{pmatrix}$$
$$\left((CB_5)\supset\{C,B_5\}\right)\wedge\left((OA)\supset[a)\right)\wedge\left((CB_5)\cap(OA)=P\right)$$
$$\left((PB_1)\supset\{P,B_1\}\big|(PB_1)\cap\cup\omega(O;R)=A_1\right)\wedge$$
$$\wedge\left((PB_2)\supset\{P,B_2\}\big|(PB_2)\cap\cup\omega(O;R)=A_2\right)\wedge\left((PB_3)\supset\{P,B_3\}\big|(PB_3)\cap\cup\omega(O;R)=A_3\right)\wedge$$
$$\wedge\left((PB_4)\supset\{P,B_4\}\big|(PB_4)\cap\cup\omega(O;R)=A_4\right)$$
$$\left(\left([OA_1)\ni A_1\right)\wedge\left([OA_2)\ni A_2\right)\wedge\left([OA_3)\ni A_3\right)\wedge\left([OA_4)\ni A_4\right)\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left(\angle AOA_1=\angle A_1OA_2=\angle A_2OA_3=\angle A_3OA_4=\angle A_4OC=1/5\cdot\angle AOC\right)$$

Равенство пяти углов, на которые разделен угол *AOC*, выводится так же, как и равенство построенных углов при делении исходного угла на три части, только дуг и углов будет пять, отличается и количество точек деления.

Хорды BB_1, B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4, B_4B_5 равны: $|BB_1|=|B_1B_2|=|B_2B_3|=|B_3B_4|=|B_4B_5|=s$, следовательно, по теореме 5.2.4. (доказанной в п. 2. этой статьи), длины соответствующих дуг тоже равны: $l_{\cup BB_1}=l_{\cup B_1B_2}=l_{\cup B_2B_3}=l_{\cup B_3B_4}=l_{\cup B_4B_5}$.

Окружности с центром в точке *O* и радиусами *R* и $k\cdot R$ являются концентрическими (Def. 5.15.1.), где $k=|OB|/|OA|$; дуги BB_5 и *AC* параллельны по определению параллельных кривых, данному в [3]. По аксиоме 4.3.2. о независимости величины угла от длины его сторон, углы APA_1 и BPB_1, углы A_1PA_2 и B_1PB_2, углы A_2PA_3 и B_2PB_3, углы A_3PA_4 и B_3PB_4, углы A_4PC и B_4PB_5 равны: $\widehat{APA_1}=\widehat{BPB_1}$, $\widehat{A_1PA_2}=\widehat{B_1PB_2}$, $\widehat{A_2PA_3}=\widehat{B_2PB_3}$, $\widehat{A_3PA_4}=\widehat{B_3PB_4}$, $\widehat{A_4PC}=\widehat{B_4PB_5}$, при этом длины дуг BB_1, B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4, B_4B_5, ограниченных сторонами углов BPB_1, B_1PB_2, B_2PB_3, B_3PB_4, B_4PB_5, равны: $l_{\cup BB_1}=l_{\cup B_1B_2}=l_{\cup B_2B_3}=l_{\cup B_3B_4}=l_{\cup B_4B_5}$, следовательно, длины дуг AA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 и A_4C, ограниченных сторонами углов APA_1, A_1PA_2, A_2PA_3, A_3PA_4 и A_4PC, тоже равны – по аксиоме 6.7. о равенстве фигур: $l_{\cup AA_1}=l_{\cup A_1A_2}=l_{\cup A_2A_3}=l_{\cup A_3A_4}=l_{\cup A_4C}$. Значит, дуга *AC* разбита на пять равных частей (Рис. 8); таким образом решена задача разделения дуги окружности на пять равных частей.

Длина дуги окружности равна произведению угловой величины этой дуги, выраженной в радианах, на радиус окружности [2]: $l_{\cup AA_1} = \overset{\frown}{AA_1} \cdot R$, $l_{\cup A_1A_2} = \overset{\frown}{A_1A_2} \cdot R$, $l_{\cup A_2A_3} = \overset{\frown}{A_2A_3} \cdot R$, $l_{\cup A_3A_4} = \overset{\frown}{A_3A_4} \cdot R$, $l_{\cup A_4C} = \overset{\frown}{A_4C} \cdot R$; угловая величина дуги равна величине центрального угла, стороны которого ограничивают эту дугу. Из равенства длин дуг AA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 и A_4C следует равенство их угловых величин: $\overset{\frown}{AA_1} = \overset{\frown}{A_1A_2} = \overset{\frown}{A_2A_3} = \overset{\frown}{A_3A_4} = \overset{\frown}{A_4C}$. Равенство угловых величин дуг AA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 и A_4C означает равенство соответствующих им центральных углов (Рис. 8): $\widehat{AOA_1} = \widehat{A_1OA_2} = \widehat{A_2OA_3} = \widehat{A_3OA_4} = \widehat{A_4OC}$; величина каждого из них равна 1/5 величины угла AOC (по аксиоме 4.7.1.).

$$\left(|BB_1| = |B_1B_2| = |B_2B_3| = |B_3B_4| = |B_4B_5| = s\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(\text{T.5.2.4.} \because l_{\cup BB_1} = l_{\cup B_1B_2} = l_{\cup B_2B_3} = l_{\cup B_3B_4} = l_{\cup B_4B_5}\right)$$
$$\left(\text{Def.5.15.1.} \because \omega(O;R) \wedge \omega(O;k\cdot R) \middle| k = |OB| / |OA|\right) \wedge \left(\cup BB_5 \parallel \cup AC\right)$$
$$\begin{pmatrix} \text{Ax.4.3.2.} \because \left(\widehat{APA_1} = \widehat{BPB_1}\right) \wedge \left(\widehat{A_1PA_2} = \widehat{B_1PB_2}\right) \wedge \\ \wedge \left(\widehat{A_2PA_3} = \widehat{B_2PB_3}\right) \wedge \left(\widehat{A_3PA_4} = \widehat{B_3PB_4}\right) \wedge \\ \wedge \left(\widehat{A_4PC} = \widehat{B_4PB_5}\right) \middle| l_{\cup BB_1} = l_{\cup B_1B_2} = l_{\cup B_2B_3} = l_{\cup B_3B_4} = l_{\cup B_4B_5} \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(\text{Ax.6.7.} \because l_{\cup AA_1} = l_{\cup A_1A_2} = l_{\cup A_2A_3} = l_{\cup A_3A_4} = l_{\cup A_4C}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(l_{\cup AA_1} = l_{\cup A_1A_2} = l_{\cup A_2A_3} = l_{\cup A_3A_4} = l_{\cup A_4C} = 1/5 \cdot l_{\cup AC}\right)$$
$$\begin{pmatrix} \left(l_{\cup AA_1} = \overset{\frown}{AA_1} \cdot R\right) \wedge \left(l_{\cup A_1A_2} = \overset{\frown}{A_1A_2} \cdot R\right) \wedge \left(l_{\cup A_2A_3} = \overset{\frown}{A_2A_3} \cdot R\right) \wedge \left(l_{\cup A_3A_4} = \overset{\frown}{A_3A_4} \cdot R\right) \wedge \\ \wedge \left(l_{\cup A_4C} = \overset{\frown}{A_4C} \cdot R\right) \middle| l_{\cup AA_1} = l_{\cup A_1A_2} = l_{\cup A_2A_3} = l_{\cup A_3A_4} = l_{\cup A_4C} \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(\overset{\frown}{AA_1} = \overset{\frown}{A_1A_2} = \overset{\frown}{A_2A_3} = \overset{\frown}{A_3A_4} = \overset{\frown}{A_4C}\right) \Leftrightarrow \left(\widehat{AOA_1} = \widehat{A_1OA_2} = \widehat{A_2OA_3} = \widehat{A_3OA_4} = \widehat{A_4OC}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(\text{Ax.4.7.1.} \because \widehat{AOA_1} = \widehat{A_1OA_2} = \widehat{A_2OA_3} = \widehat{A_3OA_4} = \widehat{A_4OC} = 1/5 \cdot \widehat{AOC}\right)$$

Применимость разработанного способа деления угла на пять равных частей показана на примере острого угла в 60°, представленного на рисунке 8, и тупого угла в 120°, представленного на рисунке 9; тупой угол разбивается на пять равных частей так же, как и острый угол. Исходные углы AOC построены с помощью транспортира, отношение радиусов окружностей равно 2. Деление исходных углов AOC на пять равных частей проведено только с помощью простой линейки и циркуля. Результаты деления проверены с помощью транспортира: для угла в 60° величина каждого из построенных углов равна 12°, для угла в 120° величина каждого из построенных углов равна 24°, то есть в обоих случаях точно равна 1/5 величины угла AOC. При этом дуга AC тоже разделена на пять равных частей: AA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 и A_4C.

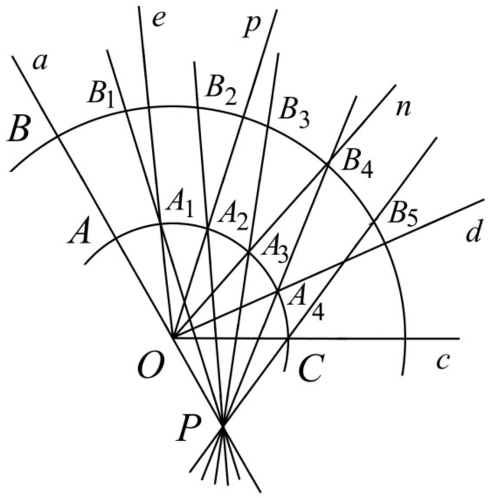

Рисунок 9.

На рисунке 10 представлен угол AOC в 60°, при этом радиус OB второй окружности в 1,5 раза больше радиуса OA. Угол AOC разделен на пять частей, величина каждого из построенных углов равна 12°, то есть 1/5 величины угла AOC. Дуга AC при этом тоже разделена на пять равных частей.

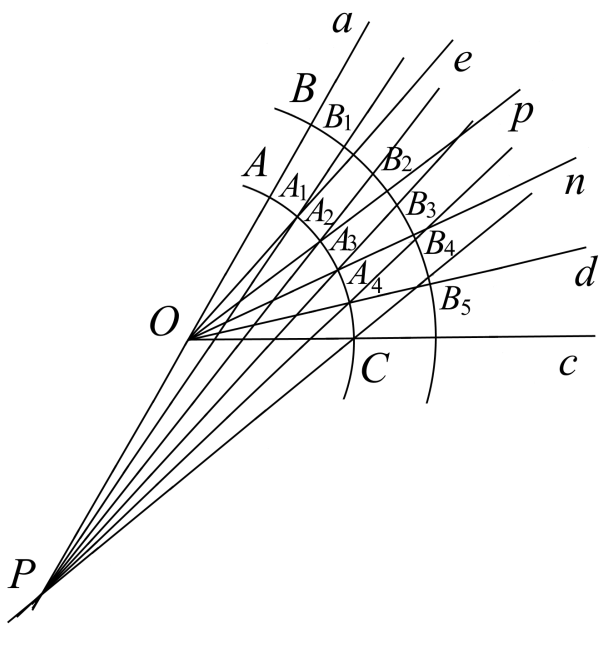

Рисунок 10.

Разработанным способом может быть осуществлено деление угла и дуги окружности на большее число равных частей.

Выводы. Разработан способ точного деления угла и дуги окружности на три равные части по правилам классической геометрии, то есть с помощью простой линейки и циркуля. Этот способ деления угла на три равные части применим к острым и тупым углам любой величины. Разработанным способом осуществляется деление угла и дуги окружности на пять и на большее число равных частей, причем как острого, так и тупого угла. Результаты деления, проверенные с помощью транспортира, точные. Задачи деления угла и дуги окружности на несколько равных частей взаимосвязаны и решаются одновременно.

Библиографический список

1. Плисова Н.Н. Основания геометрии. – 4-е изд. – М.: Эдитус, 2022. – 224 с.
2. Выгодский М.Я. Справочник по элементарной математике. – М.: АСТ: Астрель, 2006. – 509 с.
3. Плисова Н.Н. Доказательство аксиомы о параллельных прямых, или пятого постулата Евклида // Современные научные исследования и инновации, 2019, № 7 [Электронный ресурс]. URL: https://web.snauka.ru/issues/2019/07/90006