

УДК 514.12

**Умножение и деление длины отрезка на корни квадратные
в классической геометрии**

Плисова Ника Николаевна

Аннотация: Точно решена задача построения по правилам классической геометрии отрезка, длина которого равна длине заданного геометрически отрезка, умноженной или деленной на корень квадратный из некоторого целого числа.

Ключевые слова: умножение длины отрезка на корни квадратные, деление длины отрезка на корни квадратные, классическая геометрия.

**Multiplication and division of the length of a segment by square roots
in classical geometry**

Plisova Nika Nikolaevna

Moscow, Russian Federation

Abstract: The problem of constructing a segment according to the rules of classical geometry, the length of which is equal to the length of a geometrically specified segment multiplied or divided by the square root of some integer, has been precisely solved.

Keywords: multiplying the length of a segment by square roots, dividing the length of a segment by square roots, classical geometry.

Задача построения по правилам классической геометрии отрезка, длина которого равна длине заданного геометрически отрезка, умноженной или деленной на корень квадратный из некоторого целого числа, представляет тем больший теоретический интерес, что в классической геометрии расстояния или длины отрезков не имеют числового выражения, а корни квадратные выражаются иррациональными числами.

В классической геометрии все построения выполняются простой линейкой, не имеющей шкалы, и циркулем. Расстояния измеряются раствором циркуля. Углы непосредственно не измеряются (транспортир не применяется).

Доказательство базируется на аксиоматике планиметрии, которая приведена в книге автора [1] и не приводится заново в этой статье.

Дано: расстояние a , заданное геометрически (Рис. 2).

1. Умножение длины отрезка на корень квадратный из двух.

Задача: построить по правилам классической геометрии отрезок, длина которого равна длине a исходного отрезка, умноженной на корень квадратный из двух.

Сначала строим прямоугольный треугольник с равными катетами длиной a , заданной геометрически.

Для этого: проводим прямую, обозначаем ее через e ; выбираем на ней некоторую точку, которую обозначаем через A . Раствором циркуля замеряем расстояние a . Откладываем расстояние a на прямой e от точки A , конец отрезка обозначаем через B .

Из точки B восстанавливаем перпендикуляр к прямой e . Перпендикуляр восстанавливается следующим способом: проводим дуги окружности с центром в точке B и некоторым радиусом r , точки пересечения дуг с прямой e обозначаем через K и M (Рис. 1); проводим дугу окружности с центром в точке K и радиусом KM ; проводим дугу окружности с центром в точке M и радиусом $MK=KM$; точку пересечения дуг обозначаем через P . Через точки B и P проводим прямую; прямая BP перпендикулярна прямой e (Рис. 1).

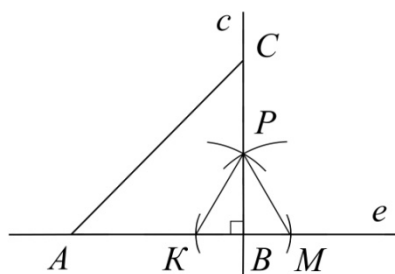


Рисунок 1.

Нужно доказать, что прямая BP перпендикулярна прямой e . Радиусы окружности с центром в точке K и окружности с центром в точке M равны: $KP=MP$, при том что $BK=BM$.

$\Delta PBK = \Delta PBM$ по трем сторонам (Ах. 8.5.3.), следовательно, $\angle PBK = \angle PBM$ по аксиоме о равенстве фигур (Ах. 6.8.). Эти углы – смежные, то есть: $\widehat{PBK} + \widehat{PBM} = \pi$ (Def. 4.14.), следовательно, $\widehat{PBK} = \widehat{PBM} = \pi/2$, то есть эти углы являются прямыми (Def. 4.10.). Перпендикулярность прямых BP и e доказана (Def. 2.10.).

$$\begin{aligned}
 & (A \in e) \wedge (|AB| = a) \\
 & (\omega(B; r) \cap e = \{K, M\}) \\
 & ((\cup \omega(K; KM) \cap \cup \omega(M; MK = KM) = P) \wedge ((BP) \supset \{B, P\})) \\
 & (\text{Def.1.16.} \therefore KP = MP \mid BK = BM) \Rightarrow \\
 & \Rightarrow (\text{Ах.8.5.3.} \therefore \Delta PBK = \Delta PBM) \Rightarrow \\
 & \Rightarrow (\text{Ах.6.8.} \therefore \angle PBK = \angle PBM \mid \widehat{PBK} + \widehat{PBM} := \pi) \Rightarrow \\
 & \Rightarrow (\widehat{PBK} = \widehat{PBM} = \pi/2) \Rightarrow (\text{Def.2.10.} \therefore (BP) \perp e) \\
 & (\cup \omega(B; a) \cap (BP) = C \mid |BC| = a) \Rightarrow (\text{Def.8.3.3., 8.4.2.} \therefore \Delta ABC)
 \end{aligned}$$

От точки B на прямой BP откладываем циркулем расстояние a , конец отрезка обозначаем через C . Соединяем отрезком точки A и C . Образуется треугольник ABC , в котором угол B – прямой и стороны AB и BC равны (Рис. 2).

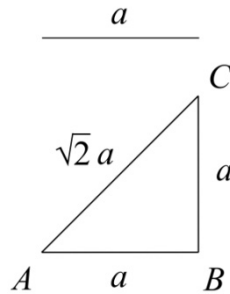


Рисунок 2.

По теореме Пифагора (теореме 9.3.), которая доказывается в рамках классической геометрии [1, п. 9.3.], гипотенуза этого треугольника равна: $d = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}a$.

Гипотенуза прямоугольного треугольника с равными катетами длиной a равна $\sqrt{2}a$ и является искомым результатом построения по правилам классической геометрии отрезка, длина которого равна длине a данного отрезка, умноженной на корень квадратный из двух.

2. Умножение длины отрезка на корень квадратный из трех.

Задача: построить по правилам классической геометрии отрезок, длина которого равна длине a исходного отрезка, умноженной на корень квадратный из трех.

Строим прямоугольный треугольник с катетами, равными a и $\sqrt{2}a$ (Рис. 3); порядок построения этого треугольника – тот же, что и порядок построения прямоугольного треугольника с равными катетами (п. 1. этой статьи), только от точки A на прямой e откладывается расстояние $\sqrt{2}a$ (а не a), от точки B на прямой BP откладывается расстояние a . Расстояние $\sqrt{3}a$ замеряется по длине гипотенузы прямоугольного треугольника с равными катетами (Рис. 2).

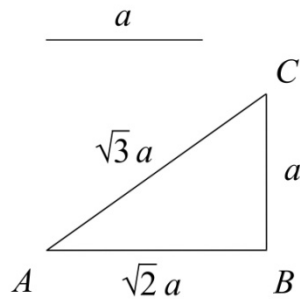


Рисунок 3.

По теореме Пифагора (теореме 9.3.), гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами длиной a и $\sqrt{2}a$ равна: $d = \sqrt{a^2 + 2a^2} = \sqrt{3}a$.

Гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами длиной a и $\sqrt{2}a$ равна $\sqrt{3}a$ и является искомым результатом построения по правилам классической геометрии отрезка, длина которого равна длине a данного отрезка, умноженной на корень квадратный из трех.

3. Умножение длины отрезка на корень квадратный из четырех.

Задача: построить по правилам классической геометрии отрезок, длина которого равна длине a исходного отрезка, умноженной на корень квадратный из четырех.

Вместо простого умножения исходной длины на два проводим то же построение, что и в предыдущем случае, чтобы сохранить общую схему построений и данное звено в ней. Строим прямоугольный треугольник с катетами длиной a и $\sqrt{3}a$ (Рис. 4); порядок построения этого треугольника – тот же, что и порядок построения прямоугольного треугольника с катетами длиной a и $\sqrt{2}a$, только от точки A на прямой e откладывается расстояние $\sqrt{3}a$ (а не $\sqrt{2}a$), от точки B на прямой BP откладывается расстояние a . Расстояние $\sqrt{3}a$ замеряется по длине гипотенузы прямоугольного треугольника с катетами a и $\sqrt{2}a$ (Рис. 3).

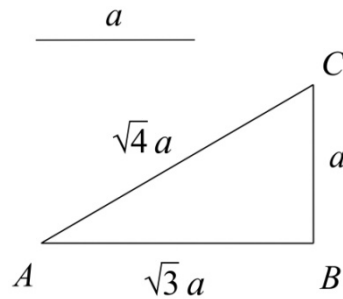


Рисунок 4.

По теореме Пифагора (теореме 9.3.), гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами длиной a и $\sqrt{3}a$ равна: $d = \sqrt{a^2 + 3a^2} = \sqrt{4}a$.

Гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами длиной a и $\sqrt{3}a$ равна $\sqrt{4}a = 2a$ и является искомым результатом построения по правилам классической геометрии отрезка, длина которого равна длине a данного отрезка, умноженной на корень квадратный из четырех.

4. Умножение длины отрезка на корень квадратный из пяти.

Задача: построить по правилам классической геометрии отрезок, длина которого равна длине a исходного отрезка, умноженной на корень квадратный из пяти.

Строим прямоугольный треугольник с катетами длиной a и $\sqrt{4}a$ (Рис. 5); порядок построения этого треугольника – тот же, что и порядок построения прямоугольного треугольника с катетами длиной a и $\sqrt{3}a$, только от точки A на прямой e откладывается расстояние $\sqrt{4}a$ (а не $\sqrt{3}a$), от точки B на прямой BP откладывается расстояние a . Расстояние $\sqrt{4}a$ замеряется по длине гипотенузы прямоугольного треугольника с катетами длиной a и $\sqrt{3}a$ (Рис. 4) (или же простым умножением на два).

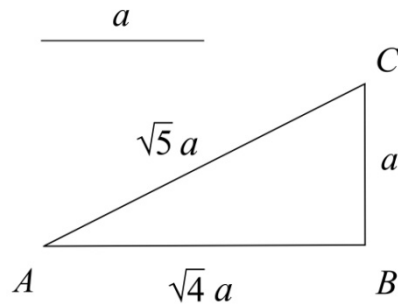


Рисунок 5.

По теореме Пифагора (теореме 9.3.), гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами длиной a и $\sqrt{4}a$ равна: $d = \sqrt{a^2 + 4a^2} = \sqrt{5}a$.

Гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами длиной a и $\sqrt{4}a$ равна $\sqrt{5}a$ и является искомым результатом построения по правилам классической геометрии отрезка, длина которого равна длине a данного отрезка, умноженной на корень квадратный из пяти.

Этим же способом может быть осуществлено геометрически умножение длины a данного отрезка на корень квадратный из чисел, бóльших пяти.

5. Деление длины отрезка на корень квадратный из двух.

Дано: отрезок длиной b (задан геометрически).

Задача: построить по правилам классической геометрии отрезок, длина a которого равна длине b данного отрезка, деленной на корень квадратный из двух: $a = b / \sqrt{2}$.

Из п. 1. этой статьи следует, что гипотенуза прямоугольного треугольника с равными катетами длиной a равна $\sqrt{2}a$. Нужно построить прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна $\sqrt{2}a$, при этом его катеты будут равны a , то есть катет даст искомую длину.

Проводим прямую p ; берем на ней некоторую точку и обозначаем ее через A . От точки A на прямой p откладываем расстояние b , точку пересечения обозначаем через B . Из точки A восстанавливаем перпендикуляр к прямой p , который обозначаем через n ; из точки B восстанавливаем перпендикуляр к прямой p , который обозначаем через c (Рис. 6); порядок построения восстановленного перпендикуляра приведен в п. 1. этой статьи.

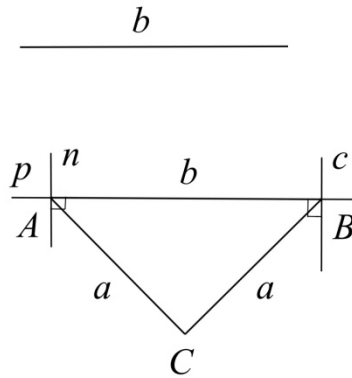


Рисунок 6.

Строим биссектрису угла между прямой p и прямой n с вершиной в точке A и биссектрису угла между прямой p и прямой c с вершиной в точке B . Биссектриса угла (pn) строится следующим образом: проводим дугу окружности с центром в точке A и некоторым радиусом r_1 , точку пересечения дуги с прямой p обозначаем через K , точку пересечения дуги с прямой n обозначаем через M (Рис. 7); проводим дугу окружности с центром в точке K и радиусом KA ; проводим дугу окружности с центром в точке M и радиусом $MA=KA$; точку пересечения дуг обозначаем через P . Через точки A и P проводим прямую; прямая AP является биссектрисой угла (pn) (Рис. 7).

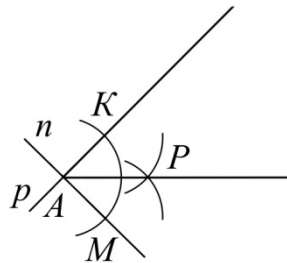


Рисунок 7.

Действительно, так как радиусы окружностей равны (Def. 1.16.), треугольник AKP равен треугольнику AMP по трем сторонам (Ах. 8.5.3.), следовательно, угол KAP равен углу MAP по аксиоме о равенстве фигур (Ах. 6.8.), следовательно, луч AP является биссектрисой угла KAM (Def. 8.9.3.), то есть биссектрисой угла (pn) (по аксиоме 4.3.2.).

$$\begin{aligned}
& (\cup \omega(A; r_1) \cap p = K) \wedge (\cup \omega(A; r_1) \cap n = M) \\
& (\cup \omega(K; KA) \cap \cup \omega(M; MA = KA) = P) \\
& ((AP) \supset \{A, P\}) \\
& (\text{Def.1.16.} \therefore KA = KP = MA = MP) \Rightarrow (\text{Ax.8.5.3.} \therefore \Delta AKP = \Delta AMP) \Rightarrow \\
& \Rightarrow (\text{Ax.6.8.} \therefore \angle KAP = \angle MAP) \Rightarrow (\text{Def.8.9.3.} \therefore (AP) = \beta_{\angle KAM}) \\
& \Rightarrow (\text{Ax.4.3.2.} \therefore (AP) = \beta_{\angle(pn)})
\end{aligned}$$

Биссектриса угла (pc) строится таким же образом. Точку пересечения биссектрис обозначаем через C (Рис. 6).

По аксиоме 8.8. о свойствах треугольника, треугольник ABC является равнобедренным и, по теореме 5.4. о сумме углов в треугольнике, прямоугольным. Гипотенуза AB равна b , следовательно, по теореме Пифагора (по теореме 9.3.), длина a равна $b/\sqrt{2}$ и является искомым результатом построения по правилам классической геометрии отрезка, длина которого равна длине b данного отрезка, деленной на корень квадратный из двух.

$$\begin{aligned}
& (\beta_{(pn)} \cap \beta_{(pc)} = C) \\
& (\text{Ax.8.8.} \therefore |AC| = |BC|) \Rightarrow (\text{Def.8.4.2.} \therefore \Delta ABC) \\
& (\text{T.5.4.} \therefore \widehat{ACB} = \pi - 2 \cdot \pi / 4 = \pi / 2) \Rightarrow \\
& \Rightarrow (\text{Def.8.3.3.} \therefore \Delta ABC) \Rightarrow \\
& \Rightarrow (\text{T.9.3.} \therefore |AB| = b = \sqrt{a^2 + a^2}) \Rightarrow (|AC| = |BC| = a = b / \sqrt{2})
\end{aligned}$$

6. Деление длины отрезка на корень квадратный из трех.

Дано: отрезок длиной b (задан геометрически).

Задача: построить по правилам классической геометрии отрезок, длина a которого равна длине b данного отрезка, деленной на корень квадратный из трех: $a = b / \sqrt{3}$.

Согласно п. 2. этой статьи, гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами длиной a и $\sqrt{2}a$ равна $\sqrt{3}a$. Нужно построить прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна $\sqrt{3}a$, при этом его катеты будут равны a и $\sqrt{2}a$, то есть меньший катет даст искомую длину. Это задача, обратная задаче построения прямоугольного треугольника по катетам a и $\sqrt{2}a$.

Берем раствором циркуля некоторое расстояние c . Строим прямоугольный треугольник с равными катетами длиной c ; порядок построения такого треугольника описан в п. 1. этой статьи. По теореме Пифагора (по теореме 9.3.), его гипотенуза равна $\sqrt{2}c$ (Рис. 8).

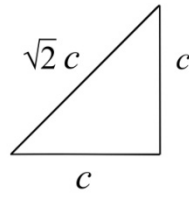


Рисунок 8.

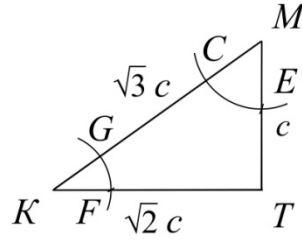


Рисунок 9.

Строим прямоугольный треугольник с катетами длиной c и $\sqrt{2}c$; по теореме Пифагора (по теореме 9.3.), его гипотенуза равна $\sqrt{3}c$ (Рис. 9); порядок построения прямоугольного треугольника с такими катетами описан в п. 2. этой статьи. Обозначим построенный треугольник через KMT (Рис. 9).

Строим прямоугольный треугольник, подобный треугольнику KMT по стороне и двум прилежащим углам. Для этого: проводим прямую p ; берем на ней некоторую точку, которую обозначаем через A ; откладываем от точки A расстояние b , обозначаем конец отрезка через B (Рис. 10): $|AB| = b$.

От прямой p строим угол с вершиной в точке B , равный углу KMT (Рис. 9): проводим дугу окружности с центром в точке M и некоторым радиусом r ; точки пересечения этой дуги с отрезками KM и MT обозначаем через C и E соответственно. Проводим дугу окружности с центром в точке B и тем же радиусом r ; точку пересечения этой дуги с отрезком AB обозначаем через P . Замеряем раствором циркуля расстояние CE . Проводим дугу окружности с центром в точке P и радиусом CE ; точку пересечения этой дуги с предыдущей дугой обозначаем через O . Через точку O проводим луч с началом в точке B (Рис. 10).

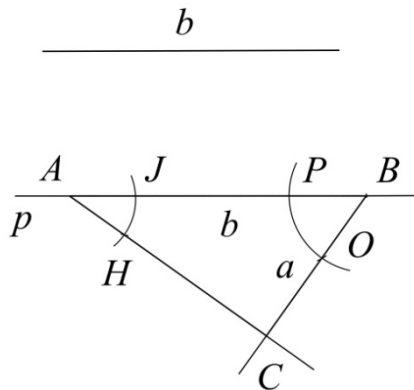


Рисунок 10.

Треугольник PBO равен треугольнику CME по трем сторонам (Ах. 8.5.3.), следовательно, угол PBO равен углу CME по аксиоме о равенстве фигур (Ах. 6.8.); по аксиоме 4.3.2. о независимости величины угла от длины его сторон, угол PBO равен углу KMT .

$$\begin{aligned}
 &(|KM| = \sqrt{3} \cdot |MT| = \sqrt{3}c) \wedge (|AB| = b) \\
 &((\cup\omega(M; r) \cap KM = C) \wedge (\cup\omega(M; r) \cap MT = E)) \\
 &(\cup\omega(B; r) \cap AB = P) \\
 &(\cup\omega(C; CE)) \wedge (\cup\omega(P; CE) \cap \cup\omega(B; r) = O) \wedge ([BO] \supset \{B, O\}) \\
 &(\text{Ах.8.5.3.} \therefore \Delta PBO = \Delta CME) \Rightarrow (\text{Ах.6.8.} \therefore \angle PBO = \angle CME) \Rightarrow \\
 &\Rightarrow (\text{Ах.4.3.2.} \therefore \angle PBO = \angle KMT)
 \end{aligned}$$

От прямой p строим угол с вершиной в точке A , равный углу MKT (Рис. 9): проводим дугу окружности с центром в точке K и некоторым радиусом R ; точки пересечения этой дуги с отрезками KM и KT обозначаем через G и F соответственно. Проводим дугу окружности с центром в точке A и тем же радиусом R ; точку пересечения этой дуги с отрезком AB обозначаем через J . Замеряем раствором циркуля расстояние GF . Проводим дугу окружности с центром в точке J и радиусом GF ; точку пересечения этой дуги с предыдущей дугой обозначаем через H . Через точку H проводим луч с началом в точке A (Рис. 10).

Треугольник JAH равен треугольнику GKF по трем сторонам (Ах. 8.5.3.), следовательно, угол JAH равен углу GKF по аксиоме о равенстве фигур (Ах. 6.8.); по аксиоме 4.3.2. о независимости величины угла от длины его сторон, угол JAH равен углу MKT .

$$\begin{aligned}
 &((\cup\omega(K; R) \cap KM = G) \wedge (\cup\omega(K; R) \cap KT = F)) \\
 &(\cup\omega(A; R) \cap AB = J) \\
 &(\cup\omega(G; GF)) \wedge (\cup\omega(J; GF) \cap \cup\omega(A; R) = H) \wedge ([AH] \supset \{A, H\}) \\
 &(\text{Ах.8.5.3.} \therefore \Delta JAH = \Delta GKF) \Rightarrow (\text{Ах.6.8.} \therefore \angle JAH = \angle GKF) \Rightarrow \\
 &\Rightarrow (\text{Ах.4.3.2.} \therefore \angle JAH = \angle MKT) \\
 &([AH] \cap [BO] = C)
 \end{aligned}$$

Луч AH пересекается с лучом BO , точку их пересечения обозначим через C (Рис. 10). Образуется треугольник ABC , подобный треугольнику KMT по стороне и двум прилежащим углам (Ах. 8.7.2.) и, следовательно, прямоугольный. Из определения подобных треугольников (Def. 8.6.) следует, что: $AB / KM = BC / MT$, при этом $|KM| = \sqrt{3} \cdot |MT|$, следовательно, $|AB| = \sqrt{3} \cdot |BC|$, значит, $|BC| = a = b / \sqrt{3}$, то есть длина отрезка BC является искомой.

$$\begin{aligned}
& (\text{Ах.8.7.2.} \because \Delta ABC \sim \Delta KMT \mid \text{Def.8.3.3.} \because \Delta ABC) \Rightarrow \\
& \Rightarrow (\text{Def.8.6.} \because AB / KM = BC / MT \mid |KM| = \sqrt{3} \cdot |MT|) \Rightarrow \\
& \Rightarrow (|AB| = \sqrt{3} \cdot |BC|) \Rightarrow (|BC| = a = b / \sqrt{3})
\end{aligned}$$

Деление длины заданного отрезка на корни из бóльших чисел проводится этим же способом, то есть сначала строится прямоугольный треугольник с одним катетом произвольной длины и вторым катетом в соответствующей пропорции, а затем строится прямоугольный треугольник, подобный построенному треугольнику, гипотенуза которого равна заданному отрезку. Из подобия треугольников следует пропорциональность их сторон; меньший катет треугольника, гипотенуза которого равна заданной длине, даст искомую длину.

Выводы. Решена, причем точно, задача построения по правилам классической геометрии отрезка, длина которого равна длине заданного геометрически отрезка, умноженной или деленной на корень квадратный из некоторого целого числа. На принципе умножения длины отрезка на корень квадратный путем геометрического построения отрезка искомой длины основана, например, система древнерусских сажень, представляющая собой систему пропорций.

Библиографический список

1. Плисова Н.Н. Основания геометрии. – 4-е изд. – М.: Эдитус, 2022. – 224 с.
2. Выгодский М.Я. Справочник по элементарной математике. – М.: АСТ: Астрель, 2006. – 509 с.