УДК 514.12

Нахождение квадратуры круга в классической геометрии и решение обратной задачи

Плисова Ника Николаевна

Аннотация: Найдена квадратура круга в рамках классической геометрии, то есть с помощью простой линейки и циркуля построен квадрат, площадь которого равна площади данного круга. Решена и обратная задача – с помощью простой линейки и циркуля построен круг, площадь которого равна площади данного квадрата.

Ключевые слова: квадратура круга, нахождение квадратуры круга, классическая геометрия.

Construction the quadrature of a circle in classical geometry and solving the inverse problem

Plisova Nika Nikolaevna
Moscow, Russian Federation

Abstract: The quadrature of a circle has been constructed within the framework of classical geometry, that is, using a simple ruler and a compass, a square has been constructed which area is equal to the area of this circle. The inverse problem has also been solved – with the help of a simple ruler and a compass, a circle has been constructed which area is equal to the area of this square.

Keywords: quadrature of a circle, construction the quadrature of a circle, classical geometry.

В данной работе поставлена и решена задача: найти квадратуру круга в рамках классической геометрии.

В классической геометрии все построения выполняются простой линейкой, не имеющей шкалы, и циркулем. Расстояния измеряются раствором циркуля; углы непосредственно не измеряются (транспортир не применяется).

Доказательство базируется на аксиоматике планиметрии, которая приведена в книге автора [1] и не приводится заново в этой статье.

Дано: круг произвольного диаметра.

Задача: с помощью простой линейки и циркуля построить квадрат, площадь которого равна площади данного круга.

1. Разбиение круга на четыре квадранта.

Если центр окружности, включающей в своей внутренней области данный круг, не задан, то для его нахождения выбираем на окружности некоторую точку A, а также еще две точки F и J. Проводим серединные перпендикуляры к двум отрезкам, точка их пересечения есть центр окружности, обозначим ее через O. Проводим отрезок AL, являющийся диаметром окружности. Строим серединный перпендикуляр n к отрезку AL; порядок построения серединного перпендикуляра к отрезку приведен в п. 7.1. этой статьи. Точки пересечения прямой n с окружностью обозначим через B и N; отрезок BN является диаметром окружности (Рис. 1). Отрезок OA является радиусом; обозначим его длину через R.

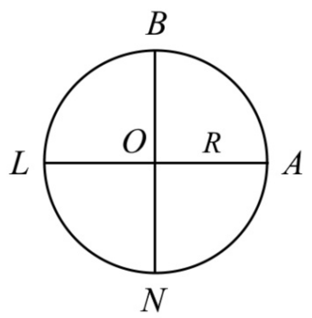

Рисунок 1.

$$\Big(\big(\forall\{A,F,J\}\subset\omega\big)\wedge\big((e\perp_S AF)\wedge(k\perp_S FJ)\big)\wedge(e\cap k=O)\Big)$$

$$\Big(\big(\text{T.8.8.2.}\because O:\omega(O;OA)\big)\wedge\big(AL\equiv\varnothing\omega(O;OA)\big)\wedge\big(|OA|\equiv R\big)\Big)$$

$$\Big((n\perp_S AL)\wedge\big(n\cap\omega(O;R)=\{B,N\}\big)\wedge\big(BN\equiv\varnothing\omega(O;R)\big)\Big)$$

$$\Big(\widehat{AOB}=\pi/2\Big)$$

При этом круг разбит на четыре квадранта (Рис. 1).

2. Деление квадранта на три равных сектора.

Это можно сделать следующим способом.

В прямоугольном треугольнике к углу в 60°, то есть к углу, составляющему 2/3 прямого, прилегает сторона, в два раза меньшая гипотенузы, что является эмпирическим фактом; обоснование этого положения приведено в п. 7.2. этой статьи.

На отрезке *OA* в данном круге выбираем некоторую точку *C*. Из точки *C* восставляем перпендикуляр к прямой *OA*; обозначаем этот перпендикуляр через *c*; порядок построения восставленного перпендикуляра к прямой приведен в п. 7.3. этой статьи. Проводим дугу окружности с центром в точке *O* и радиусом, равным удвоенному расстоянию *OC*, до пересечения ее с прямой *c*; точку пересечения обозначаем через *K*. Проводим луч *OK* до пересечения его с дугой *AB* – дугой окружности, заключенной в данном квадранте; обозначаем точку пересечения через *T* (Рис. 2). Треугольник *OCK* – прямоугольный, его сторона *OC* в два раза меньше гипотенузы *OK*, следовательно, угол *COK* равен 2/3 прямого угла; по аксиоме о независимости величины угла от длины его сторон (Ax. 4.3.2.), угол *AOT* равен 2/3 прямого угла.

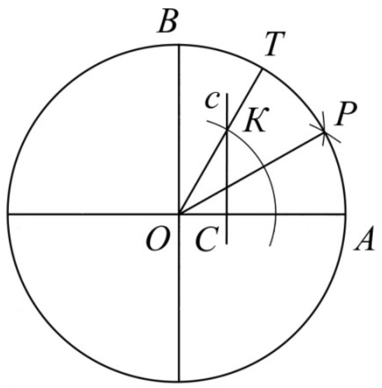

Рисунок 2.

Проводим биссектрису угла *AOT*; точку пересечения этой биссектрисы с дугой *AB* обозначаем через *P* (Рис. 2); порядок построения биссектрисы угла приведен в п. 7.4. этой статьи.

Таким образом, прямой угол *AOB* разбит на три равных угла: *AOP*, *POT* и *TOB*.

$$\left(\forall C \in OA\right) \wedge \left(c : \left(c \ni C\right) \wedge \left(c \perp_r OA\right)\right)$$

$$\left(\cup\omega\left(O; 2\cdot OC\right) \cap c = K\right) \wedge \left(\left[OK\right) \supset \left\{O, K\right\}\right)$$

$$\left(\left[OK\right) \cap \cup AB = T\right)$$

$$\left(\text{Def.8.3.3.} \because \Delta OCK \left| OC = 1/2 \cdot OK\right.\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\widehat{COK} = 2/3 \cdot \pi/2\right) \Rightarrow \left(\text{Ax.4.3.2.} \because \widehat{AOT} = 2/3 \cdot \pi/2\right)$$

$$\left(\beta_{\angle AOT} \cap \cup AB = P\right) \Rightarrow \left(\widehat{AOP} = \widehat{POT} = \widehat{TOB} = 1/3 \cdot \pi/2\right)$$

3. Разбиение углов, составляющих одну треть прямого, на четыре равных угла.

Рассмотрим угол AOP. Проводим его биссектрису OA_2; порядок построения биссектрисы приведен в п. 7.4. этой статьи. Проводим биссектрису OA_1 угла AOA_2; проводим биссектрису OA_3 угла A_2OP (Рис. 3).

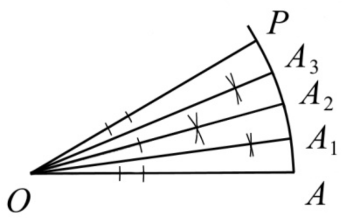

Рисунок 3.

Угол AOP разбит на четыре равных угла: AOA_1, A_1OA_2, A_2OA_3 и A_3OP.

$$\left(\beta_{\angle AOP} = OA_2\right) \wedge \left(\beta_{\angle AOA_2} = OA_1\right) \wedge \left(\beta_{\angle A_2OP} = OA_3\right)$$

$$\left(\angle AOA_1 = \angle A_1OA_2 = \angle A_2OA_3 = \angle A_3OP = 1/4 \cdot \angle AOP\right)$$

Углы POT и TOB разбиваются на четыре равных угла таким же способом.

$$\left(\beta_{\angle POT} = OP_2\right) \wedge \left(\beta_{\angle POP_2} = OP_1\right) \wedge \left(\beta_{\angle P_2OT} = OP_3\right)$$

$$\left(\angle POP_1 = \angle P_1OP_2 = \angle P_2OP_3 = \angle P_3OT = 1/4 \cdot \angle POT\right)$$

$$\left(\beta_{\angle TOB} = OT_2\right) \wedge \left(\beta_{\angle TOT_2} = OT_1\right) \wedge \left(\beta_{\angle T_2OB} = OT_3\right)$$

$$\left(\angle TOT_1 = \angle T_1OT_2 = \angle T_2OT_3 = \angle T_3OB = 1/4 \cdot \angle TOB\right)$$

В итоге квадрант AOB разбит на 12 равных секторов (Рис. 4а).

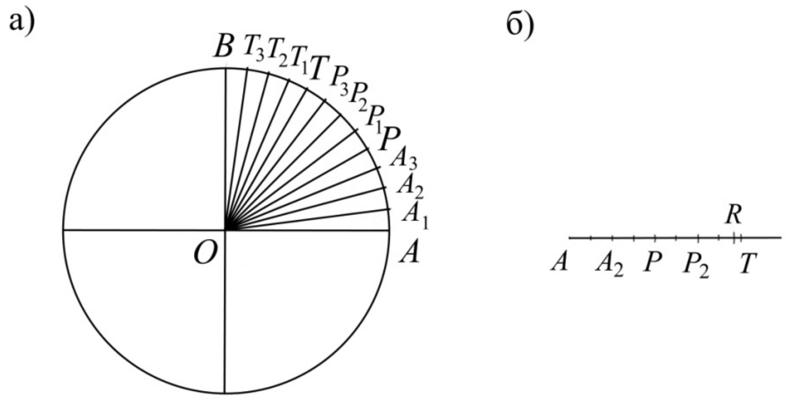

Рисунок 4.

$\left(\triangleleft AOB = 12 \cdot \triangleleft AOA_1\right)$

4. Нахождение в рассматриваемом квадранте длины дуги, равной радиусу окружности.

В квадранте *AOB* от точки *A* нужно вымерить длину дуги, приблизительно равную радиусу данной в задаче окружности. Раствором циркуля последовательно измеряются длины l_0 хорд, соединяющих точки пересечения дуги *AB* с лучами, делящими квадрант *AOB* на 12 равных секторов (Рис. 4а); длины l_0 хорд приблизительно равны длинам l дуг (длины l несколько больше длин l_0). Измеренные расстояния последовательно откладываются на отдельно проведенном луче от его начала (Рис. 4б, 5). Суммарная длина семи с дробью хорд, стягивающих дуги малых секторов, примерно равна радиусу окружности: $R \approx \left(7+3/5\right)\cdot \overline{l_0} \approx \left(7+3/5\right)\cdot \overline{l}$.

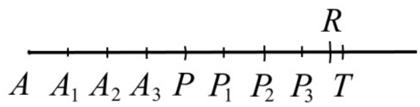

Рисунок 5.

5. Расчет площади круга.

Площадь круга равна: $S_{\bigcirc} = 4 \cdot S_{\triangleleft AOB} = 4 \cdot 12 \cdot S_{\triangleleft AOA_1}$, где $S_{\triangleleft AOB}$ – площадь квадранта *AOB*; площадь квадранта *AOB* равна умноженному на 12 усредненному значению площади малого сектора, который будем обозначать через AOA_1. Площадь малого сектора равна [2]: $S_{\triangleleft AOA_1} = 1/2 \cdot \overline{l} \cdot R \approx 1/2 \cdot R^2 / \left(7+3/5\right)$, где $\overline{l}$ – средняя длина дуги, ограничивающей малый сектор, которая приблизительно равна: $\overline{l} \approx R/\left(7+3/5\right)$. Тогда площадь круга равна:

$$S_{\bigcirc} \approx 4\cdot 12 \cdot 1/2 \cdot R^2 / \left(7+3/5\right) = 60/19 \cdot R^2 = \left(3+3/19\right)\cdot R^2 \approx \left(3+4/25\right)\cdot R^2 .$$

6. Построение квадрата, площадь которого равна площади данного круга.

Сторона квадрата, площадь которого равна площади данного круга, равна: $a_{\square} = \sqrt{3+4/25} \cdot R = \sqrt{3+(2/5)^2} \cdot R$. Порядок умножения длины на корень квадратный приведен в статье автора, публикуемой в этом же номере журнала: Плисова Н.Н. Умножение и деление длины отрезка на корни квадратные в классической геометрии. В указанной статье изложен порядок построения прямоугольных треугольников, нужных для нахождения искомых длин отрезков, поэтому в этой статье он не приводится.

Сначала строим прямоугольный треугольник с равными катетами длиной R (Рис. 6а). По теореме Пифагора (по теореме 9.3.), которая доказывается в рамках классической геометрии [1], гипотенуза этого треугольника равна $\sqrt{2}R$.

Строим прямоугольный треугольник, один катет которого равен R, а другой катет равен $\sqrt{2}R$ (Рис. 6б); для этого замеряется раствором циркуля длина гипотенузы построенного перед этим треугольника с равными катетами (Рис. 6а) и откладывается на прямой, на которой лежит соответствующая сторона треугольника. По теореме Пифагора (по теореме 9.3.), гипотенуза построенного прямоугольного треугольника равна $\sqrt{3}R$.

Нужно получить геометрически длину, равную $a_{\square} = \sqrt{3+4/25} \cdot R = \sqrt{3+(2/5)^2} \cdot R$. Для этого строим прямоугольный треугольник, один катет которого равен $\sqrt{3}R$, а другой катет равен $2/5 \cdot R$ (Рис. 6г); для этого замеряется раствором циркуля длина $\sqrt{3}R$ гипотенузы построенного перед этим треугольника (Рис. 6б) и откладывается на прямой, на которой лежит соответствующая сторона треугольника. Длина $2/5 \cdot R$ получается путем разбиения отрезка A_1A_6 длиной R на 5 равных частей и замера расстояния A_1A_3 в 2 части: $2/5 \cdot R = |A_1A_3|$ (Рис. 6в); порядок разбиения отрезка на пять равных частей приведен в п. 7.5. этой статьи. По теореме Пифагора (по теореме 9.3.), гипотенуза d этого треугольника равна: $d = \sqrt{3+(2/5)^2} \cdot R$.

Строим квадрат со стороной, равной: $a_{\square} = d = \sqrt{3+(2/5)^2} \cdot R$ (Рис. 6д); длина стороны квадрата замеряется раствором циркуля по гипотенузе d построенного перед этим прямоугольного треугольника с катетами, равными $\sqrt{3}R$ и $2/5 \cdot R$ (Рис. 6г).

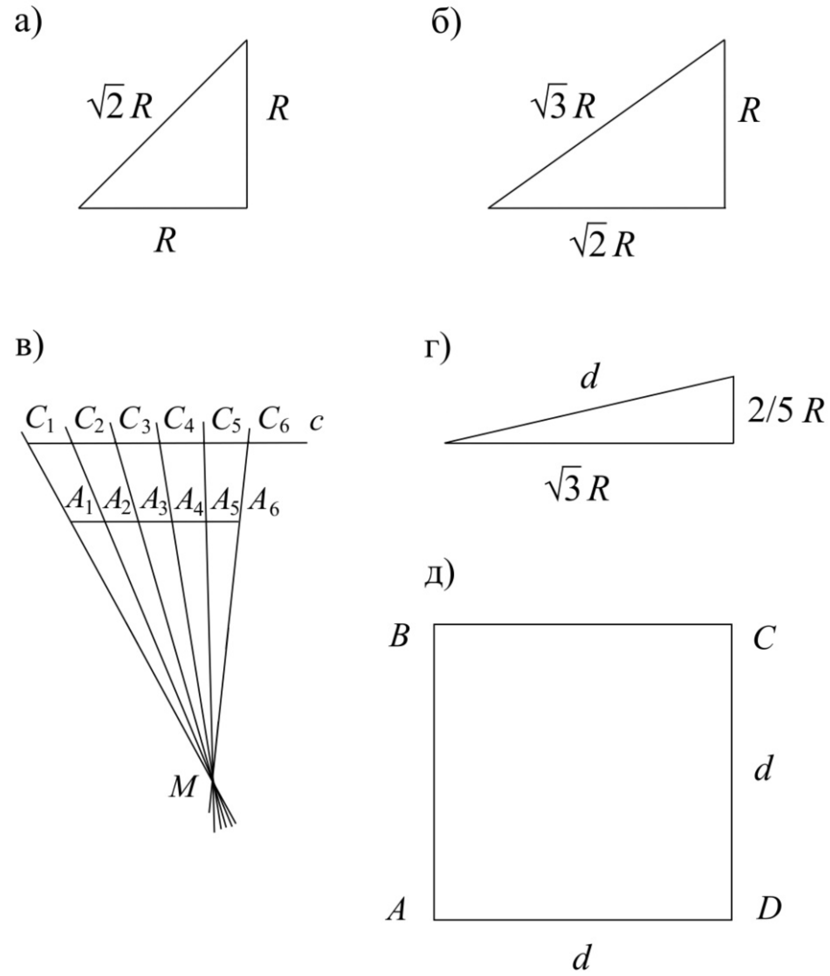

Рисунок 6.

Квадрат строится следующим образом. Проводим прямую, обозначаем ее через *p*. На прямой *p* берем некоторую точку, которую обозначаем через *A*. Из точки *A* восставляем перпендикуляр к прямой *p*, обозначим его через *AK*; порядок построения восставленного перпендикуляра приведен в п. 7.3. этой статьи. Проводим дугу окружности с центром в точке *A* и радиусом *d*, точки пересечения дуги с прямой *AK* и с прямой *p* обозначаем через *B* и *D* соответственно. Расстояния *AB* и *AD* раны *d*. Из точки *D* восставляем перпендикуляр к прямой *p*, обозначим его через *DM*. От точки *D* на прямой *DM* откладываем расстояние *d*, конец отрезка обозначаем через *C*. Соединяем отрезком точки *B* и *C*, при этом образуется четырехугольник *ABCD*. Прямые *AD* и *BC* – равноудаленные и, следовательно, по теореме 7.2., параллельные; прямые *AB* и *DC* параллельны по теореме 3.3., следовательно, четырехугольник *ABCD* является параллелограммом. По второму свойству параллелограмма (по теореме 7.6.2.), стороны *AD* и *BC* равны, углы *BAD* и *ABC*, углы *CDA* и *DCB* равны, следовательно, четырехугольник *ABCD* является квадратом.

$$\left(A \in p\right) \wedge \left(\left(AK\right) \perp_r p \middle| \left(AK\right) \ni A\right)$$
$$\left(\left(\cup\omega\left(A;d\right) \cap \left(AK\right) = B\right) \wedge \left(\cup\omega\left(A;d\right) \cap p = D\right) \middle\| AB\right| = \left|AD\right| = d\right)$$
$$\left(\left(\left(DM\right) \perp_r p \middle| \left(DM\right) \ni D\right)\right)$$
$$\left(\cup\omega\left(D;d\right) \cap \left(DM\right) = C \middle\| DC\right| = d\right) \wedge \left(\left[BC\right] \supset \left\{B, C\right\}\right)$$
$$\left(\left(\text{Т.7.2.} \because \left(AD\right) \parallel \left(BC\right)\right) \wedge \left(\text{Т.3.3.} \because \left(AB\right) \parallel \left(DC\right)\right)\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(\text{Т.7.6.2.} \because \left(AD = BC\right) \wedge \left(\angle BAD = \angle ABC\right) \wedge \left(\angle CDA = \angle DCB\right)\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(\square ABCD\right)$$

Площадь квадрата *ABCD* (Рис. 6д) равна площади данного круга: $S_{\square} = a_{\square}^2 = \left(3 + \left(2/5\right)^2\right) \cdot R^2 \approx S_{\bigcirc}$, то есть построенный квадрат представляет собой решение поставленной задачи.

7. Приложения.

7.1. Построение серединного перпендикуляра к отрезку.

Чтобы построить серединный перпендикуляр к отрезку *AL*, проводим окружность с центром в точке *A* и радиусом *AL*, проводим окружность с центром в точке *L* и радиусом *LA=AL*, точки пересечения окружностей обозначаем через *F* и *G*. Через точки *F* и *G* проводим прямую *n*, которая является серединным перпендикуляром к отрезку *AL*; точку их пересечения обозначаем через *O* (Рис. 7).

Действительно, треугольники *FAG* и *FLG* равны по трем сторонам (Ax. 8.5.3.), следовательно, углы *AFG* и *LFG* равны по аксиоме о равенстве фигур (Ax. 6.8.). Треугольники *AFO* и *LFO* равны по двум сторонам и углу между ними (Ax. 8.5.1.), следовательно, отрезки *AO* и *OL*, углы *FOA* и *FOL* равны по аксиоме о равенстве фигур (Ax. 6.8.). Углы *FOA* и *FOL* – смежные (Def. 4.14.), следовательно, они – прямые (Def. 4.10., 4.17.). Прямая *FG* является серединным перпендикуляром к отрезку *AL* (Def. 3.11.).

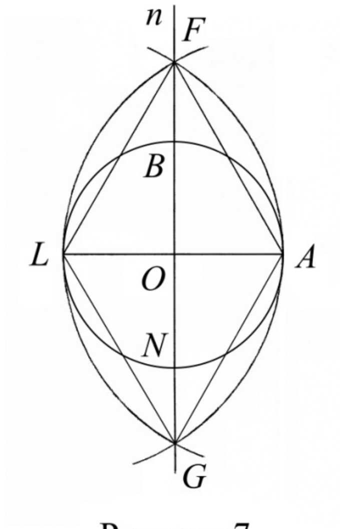

Рисунок 7.

$$\left(\omega\left(A;AL\right)\bigcap\omega\left(L;LA=AL\right)=\left\{F,G\right\}\right)\wedge\left(\left(FG\right)\supset\left\{F,G\right\}\right)\wedge\left(\left(FG\right)\equiv n\right)$$
$$\left(\left(FG\right)\bigcap\left[AL\right]=O\right)$$
$$\left(\text{Def.1.16.}\because AF=AG=LF=LG\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left(\text{Ax.8.5.3.}\because \Delta AFG=\Delta LFG\right)\Rightarrow\left(\text{Ax.6.8.}\because \angle AFG=\angle LFG\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left(\text{Ax.4.3.2.}\because \angle AFO=\angle LFO\right)\Rightarrow\left(\text{Ax.8.5.1.}\because \Delta AFO=\Delta LFO\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left(\text{Ax.6.8.}\because\left(AO=OL\right)\wedge\left(\angle FOA=\angle FOL\middle|\widehat{FOA}+\widehat{FOL}:=\pi\right)\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left(\text{Def.4.10.}\because \widehat{FOA}=\widehat{FOL}=\pi/2\right)\Leftrightarrow\left(\text{Def.3.11.}\because\left(FG\right)\perp\left[AL\right]\middle|AO=OL\right)\square$$

7.2. В прямоугольном треугольнике к стороне, в два раза меньшей гипотенузы, прилежит угол в 2/3 прямого.

Теорема: В прямоугольном треугольнике угол, прилежащий катету, в два раза меньшему гипотенузы, равен π/3.

Доказательство: Пускай в прямоугольном треугольнике *ABC* (Def. 8.3.3.): угол *B* – прямой; катет *BC* равен половине гипотенузы *AC*. Проведем медиану к гипотенузе *AC*, обозначим ее через *BM* (Рис. 8). По теореме 8.12.2., медиана *MB* равна половине гипотенузы, то есть равна отрезку *MC*, катет *BC* равен отрезку *MC* по условию, значит, треугольник *BCM* – равносторонний (Def. 8.4.3.). По теореме 8.11.1., в равностороннем треугольнике все углы равны. По теореме 5.4., сумма углов в треугольнике равна π, следовательно, угол *BCM* равен π/3. По аксиоме 4.3.2., угол *BCA* равен π/3, что и требовалось доказать.

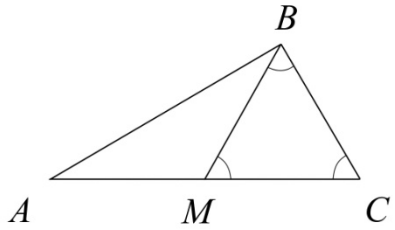

Рисунок 8.

$$\left(\text{Def.8.3.3.} \because \Delta ABC : \left(\widehat{ABC} = \pi/2\right) \wedge \left(BC = 1/2 \cdot AC\right)\right)$$

$$\left(m_{AC} \equiv BM\right) \Rightarrow \left(\text{Def.8.9.2.} \because MC = 1/2 \cdot AC\right)$$

$$\left(\text{T.8.12.2.} \because MB = MC \middle| BC = MC\right) \Rightarrow \left(\text{Def.8.4.3.} \because \Delta BMC\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\text{T.8.11.1.} \because \angle BMC = \angle BCM = \angle MBC\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\text{T.5.4.} \because \widehat{BCM} = \pi/3\right) \Rightarrow \left(\text{Ax.4.3.2.} \because \widehat{BCA} = \pi/3\right) \square$$

7.3.Построение восставленного к прямой перпендикуляра.

На отрезке *OA* выбираем некоторую точку *C*. Проводим окружность с центром в точке *C* и некоторым радиусом *r*, точки ее пересечения с отрезком *OA* обозначаем через *K* и *M*. Проводим дугу окружности с центром в точке *K* и радиусом *KM*; проводим дугу окружности с центром в точке *M* и радиусом *MK*=*KM*; точку пересечения дуг в полуплоскости нахождения точки *B* обозначаем через *P*. Через точки *C* и *P* проводим прямую и обозначаем ее через *c* (Рис. 9). Прямая *c* является серединным перпендикуляром к прямой *OA*.

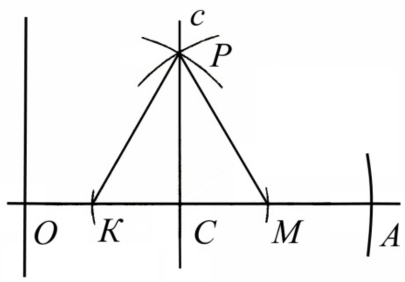

Рисунок 9.

Радиусы окружностей равны: *KP*=*MP*, следовательно, треугольники *PCK* и *PCM* равны по трем сторонам (Ax. 8.5.3.). Тогда углы *PCK* и *PCM* равны по аксиоме о равенстве фигур (Ax. 6.8.), при этом эти углы – смежные (Def. 4.14.), следовательно, прямая *c*, проходящая через точку *P*, является серединным перпендикуляром к отрезку *KM* (Def. 3.11.). Прямые *c* и *OA* перпендикулярны.

$\left(\omega(C;r)\bigcap[OA]=\{K,M\}\middle|C\in(OA)\right)$

$\left(\left(\cup\omega(K;KM)\bigcap\cup\omega(M;MK=KM)=P\right)\wedge\left(c\supset\{C,P\}\right)\right)$

$\left(\text{Def.1.16.}\because KP=MP\middle|KC=CM\right)\Rightarrow$

$\Rightarrow\left(\text{Ax.8.5.3.}\because \Delta PCK=\Delta PCM\right)\Rightarrow$

$\Rightarrow\left(\text{Ax.6.8.}\because \angle PCK=\angle PCM\middle|\widehat{PCK}+\widehat{PCM}:=\pi\right)\Rightarrow$

$\Rightarrow\left(\widehat{PCK}=\widehat{PCM}=\pi/2\middle|KC=CM\right)\Rightarrow$

$\Rightarrow\left(\text{Def.3.11.}\because c\perp_S[KM]\middle|c\supset\{C,P\}\right)\Rightarrow\left(\text{Def.2.10.}\because c\perp(OA)\right)$

7.4. Построение биссектрисы угла.

Построим биссектрису угла *AOT*. Для этого проводим дугу окружности с центром в точке *O* и некоторым радиусом *r*, пересекающую стороны этого угла *OA* и *OT* в точках, которые обозначаем через *L* и *N*. Проводим дугу окружности с центом в точке *L* и радиусом *LO*=*r*, проводим дугу окружности с центом в точке *N* и радиусом *NO*=*LO*, точку пересечения дуг обозначаем через *Q*. Из точки *O* проводим луч через точку *Q* (Рис. 10). Луч *OQ* является биссектрисой угла *AOT*.

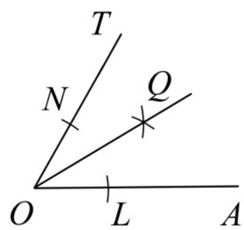

Рисунок 10.

Действительно, треугольник *OLQ* равен треугольнику *ONQ* по трем сторонам (Ax. 8.5.3.), так как радиусы окружностей равны (Def. 1.16.): *NO*=*LO*=*r*, следовательно, угол *LOQ* равен углу *NOQ* по аксиоме о равенстве фигур (Ax. 6.8.). Угол *AOQ* равен углу *LOQ*, а угол *TOQ* равен углу *NOQ* по аксиоме о независимости величины угла от длины его сторон (Ax. 4.3.2.). Углы *AOQ* и *TOQ* равны по аксиоме 6.7. о равенстве фигур, то есть луч *OQ* является биссектрисой угла *AOT*.

$\left(\cup\omega(O;r)\bigcap[OA)=L\right)\wedge\left(\cup\omega(O;r)\bigcap[OT)=N\right)$

$\left(\cup\omega(L;LO=r)\bigcap\cup\omega(N;NO=LO=r)=Q\right)$

$\left([OQ)\supset\{O,Q\}\right)$

$\left(\text{Def.1.16.}\because LO=LQ=NO=NQ\right)\Rightarrow\left(\text{Ax.8.5.3.}\because \Delta OLQ=\Delta ONQ\right)\Rightarrow$

$\Rightarrow\left(\text{Ax.6.8.}\because \angle LOQ=\angle NOQ\middle|\text{Ax.4.3.2.}\because\left(\angle AOQ=\angle LOQ\right)\wedge\left(\angle TOQ=\angle NOQ\right)\right)\Rightarrow$

$\Rightarrow\left(\text{Ax.6.7.}\because \angle AOQ=\angle TOQ\right)\Rightarrow\left(\text{Def.8.9.3.}\because [OQ)=\beta_{\angle AOT}\right)$

7.5. Разбиение отрезка на пять равных частей.

Нужно разбить отрезок длиной R на пять равных отрезков [2]. Обозначим отрезок длиной R через A_1A_6. На произвольном расстоянии от отрезка A_1A_6 проводим параллельную ему прямую, обозначаем ее через c; порядок построения прямой приведен в [1, п. 7.2.2.]. На этой прямой берем произвольную точку C_1 (со стороны точки A_1); от нее откладываем циркулем некоторое расстояние и обозначаем полученную точку через C_2; от точки C_2 откладываем то же самое расстояние C_1C_2 и получаем точку C_3; от точки C_3 откладываем то же самое расстояние C_1C_2 и получаем точку C_4; от точки C_4 откладываем то же самое расстояние C_1C_2 и получаем точку C_5; от точки C_5 откладываем то же самое расстояние C_1C_2 и получаем точку C_6. Через точки A_1 и C_1, точки A_6 и C_6 проводим прямые до их пересечения в точке, которую обозначаем через M. Через точки M и C_2, M и C_3 и так далее проводим прямые, точки их пересечения с отрезком A_1A_6 обозначаем через A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 и A_6 (Рис. 11); эти точки разбивают отрезок A_1A_6 на пять равных частей.

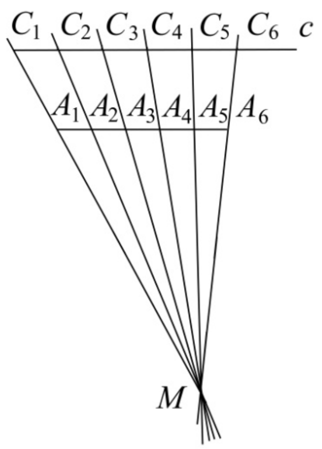

Рисунок 11.

По теореме 8.5.4., отрезки A_1A_6 и C_1C_6 являются прообразом и образом при гомотетии относительно точки M; то же справедливо относительно отрезков A_1A_2 и C_1C_2, A_2A_3 и C_2C_3 и так далее. Отрезок C_1C_6 разбит на пять равных частей, следовательно, и отрезок A_1A_6 разбит на пять равных частей, так как коэффициент гомотетии един для всех отрезков.

$$\left(c \parallel [A_1A_6]\right) \wedge \left(C_1 \in c\right)$$

$$\left(\cup\omega(C_1;r) \cap c = C_2\right) \wedge \left(\cup\omega(C_2;r = C_1C_2) \cap c = C_3\right) \wedge \left(\cup\omega(C_3;C_1C_2) \cap c = C_4\right) \wedge$$
$$\wedge \left(\cup\omega(C_4;r = C_1C_2) \cap c = C_5\right) \wedge \left(\cup\omega(C_5;r = C_1C_2) \cap c = C_6\right)$$

$$\left(\left((A_1C_1) \supset \{A_1, C_1\}\right) \wedge \left((A_6C_6) \supset \{A_6, C_6\}\right)\right) \wedge \left((A_1C_1) \cap (A_6C_6) = M\right)$$

$$\begin{pmatrix} \left((MC_2) \cap [A_1A_6] = A_2\right) \wedge \left((MC_3) \cap [A_1A_6] = A_3\right) \wedge \left((MC_4) \cap [A_1A_6] = A_4\right) \wedge \\ \wedge \left((MC_5) \cap [A_1A_6] = A_5\right) \end{pmatrix}$$

$$\left(\text{Т.8.5.4.} \because \mathit{\Gamma}_M^k A_1A_6 = C_1C_6\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} \left(\mathit{\Gamma}_M^k A_1A_2 = C_1C_2\right) \wedge \left(\mathit{\Gamma}_M^k A_2A_3 = C_2C_3\right) \wedge \\ \wedge \left(\mathit{\Gamma}_M^k A_3A_4 = C_3C_4\right) \wedge \left(\mathit{\Gamma}_M^k A_4A_5 = C_4C_5\right) \wedge \\ \wedge \left(\mathit{\Gamma}_M^k A_5A_6 = C_5C_6\right) \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(|A_1A_2| = |A_2A_3| = |A_3A_4| = |A_4A_5| = |A_5A_6| \,\|\, |C_1C_2| = |C_2C_3| = |C_3C_4| = |C_4C_5| = |C_5C_6|\right)$$

8. Решение обратной задачи – построение круга, площадь которого равна площади данного квадрата.

Дано: квадрат со стороной некоторой длины $b_{\square}$ (Рис. 14).

Задача: по правилам классической геометрии построить круг, площадь которого равна площади данного квадрата.

Из задачи нахождения квадратуры круга следует, что: $S_{\square} \approx S_{\bigcirc} \Big| a_{\square} = \sqrt{3 + (2/5)^2} \cdot R$, следовательно, для нахождения радиуса искомого круга нужно провести деление длины b на корень квадратный: $b_{\square} / \sqrt{3 + (2/5)^2}$. Геометрическое деление длины отрезка на корень квадратный отлично от алгебраического, так как все рассматриваемые отрезки не коллинеарны.

Порядок деления длины отрезка на корень квадратный подробно изложен в уже указанной статье автора: Плисова Н.Н. Умножение и деление длины отрезка на корни квадратные в классической геометрии. Здесь он будет приводиться кратко, без доказательств, которые приведены в указанной статье.

Сначала нужно построить прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна $\sqrt{3}c$. Для этого берем раствором циркуля некоторое расстояние c. Строим прямоугольный треугольник с равными катетами длиной c (Рис. 12а). По теореме Пифагора (по теореме 9.3.), его гипотенуза равна $\sqrt{2}c$.

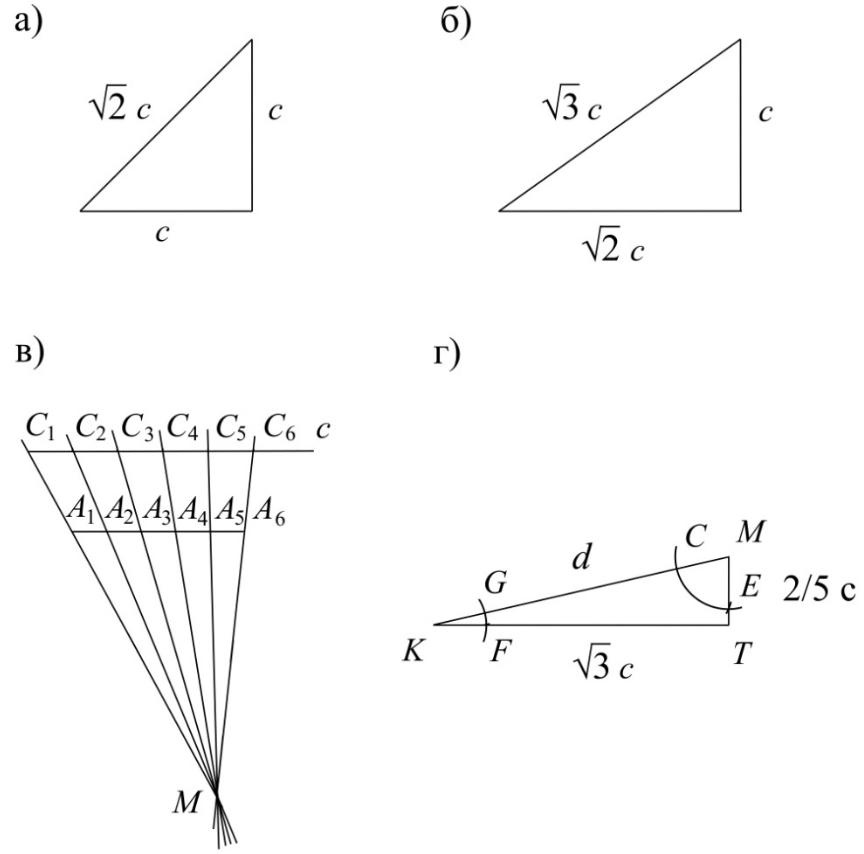

Рисунок 12.

Строим прямоугольный треугольник с катетами длиной *c* и $\sqrt{2}c$ (Рис. 12б); длина $\sqrt{2}c$ замеряется по гипотенузе построенного перед этим треугольника с равными катетами (Рис. 12а). По теореме Пифагора (по теореме 9.3.), гипотенуза этого треугольника равна $\sqrt{3}c$.

Чтобы получить длину $\sqrt{3+\left(2/5\right)^2}\cdot c$, строим прямоугольный треугольник с катетами длиной $\sqrt{3}c$ и $2/5\cdot c$ (Рис. 12г); длина $\sqrt{3}c$ замеряется по гипотенузе треугольника с катетами длиной *c* и $\sqrt{2}c$ (Рис. 12б); длина $2/5\cdot c$ определяется путем разбиения отрезка длиной *c* на 5 равных частей и замера суммарной длины двух частей (Рис. 12в); порядок разбиения описан в п. 7.5. этой статьи. Обозначим построенный треугольник через *KMT* (Рис. 12г). По теореме Пифагора (по теореме 9.3.), его гипотенуза равна $\sqrt{3+\left(2/5\right)^2}\cdot c$.

Строим прямоугольный треугольник, подобный треугольнику *KMT* по стороне и двум прилежащим углам, гипотенуза которого равна *b*. Для этого: проводим прямую *p*; берем на ней некоторую точку, которую обозначаем через *A*; откладываем от точки *A* расстояние *b*, обозначаем конец отрезка через *B* (Рис. 13а): $\left|AB\right| = b_{\square}$.

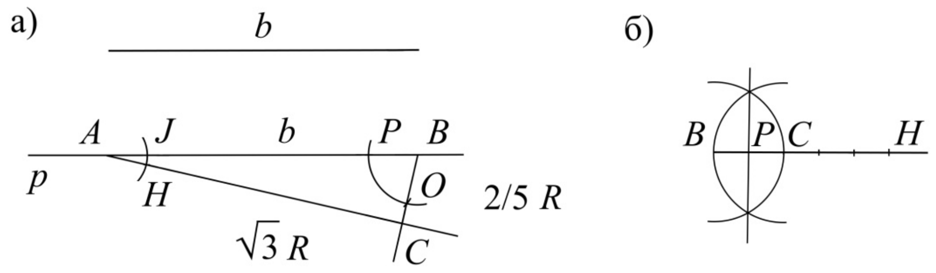

Рисунок 13.

От прямой p строим угол с вершиной в точке B, равный углу KMT: проводим дугу окружности с центром в точке M и некоторым радиусом r; точки пересечения этой дуги с отрезками KM и MT обозначаем через C и E соответственно (Рис. 12г). Проводим дугу окружности с центром в точке B и тем же радиусом r; точку пересечения этой дуги с отрезком AB обозначаем через P. Замеряем раствором циркуля расстояние CE. Проводим дугу окружности с центром в точке P и радиусом CE; точку пересечения этой дуги с предыдущей дугой обозначаем через O. Через точку O проводим луч с началом в точке B (Рис. 13а).

От прямой p строим угол с вершиной в точке A, равный углу MKT: проводим дугу окружности с центром в точке K и некоторым радиусом R; точки пересечения этой дуги с отрезками KM и KT обозначаем через G и F соответственно (Рис. 12г). Проводим дугу окружности с центром в точке A и тем же радиусом R; точку пересечения этой дуги с отрезком AB обозначаем через J. Замеряем раствором циркуля расстояние GF. Проводим дугу окружности с центром в точке J и радиусом GF; точку пересечения этой дуги с предыдущей дугой обозначаем через H. Через точку H проводим луч с началом в точке A (Рис. 13а).

Луч AH пересекается с лучом BO, точку их пересечения обозначим через C (Рис. 13а). Образуется треугольник ABC, подобный треугольнику KMT по стороне и двум прилежащим углам (Ax. 8.7.2.) и, следовательно, прямоугольный; его катеты считаем соответственно пропорциональными R. Из определения подобных треугольников (Def. 8.6.) следует, что: $AB / KM = BC / MT$, при этом $|KM| = \sqrt{3+(2/5)^2} \cdot c$, $|MT| = 2/5 \cdot c$, $|AB| = b$, следовательно, $|BC| = 2/5 \cdot b / \sqrt{3+(2/5)^2} = 2/5 \cdot R$.

Нужно геометрически определить длину R. Проводим луч от некоторой точки, которую обозначим через B, от точки B откладываем расстояние BC; делим отрезок BC пополам, для чего проводим серединный перпендикуляр к нему, середину отрезка BC обозначаем через P (Рис. 13б); порядок построения серединного перпендикуляра к отрезку приведен в п. 7.1.

этой статьи. Длина отрезка *BP* равна 1/5 искомого радиуса. От точки *C* откладываем последовательно три раза расстояние *BP*, конечную точку обозначаем через *H*. Длина отрезка *BH* равна искомому радиусу круга (Рис. 13б).

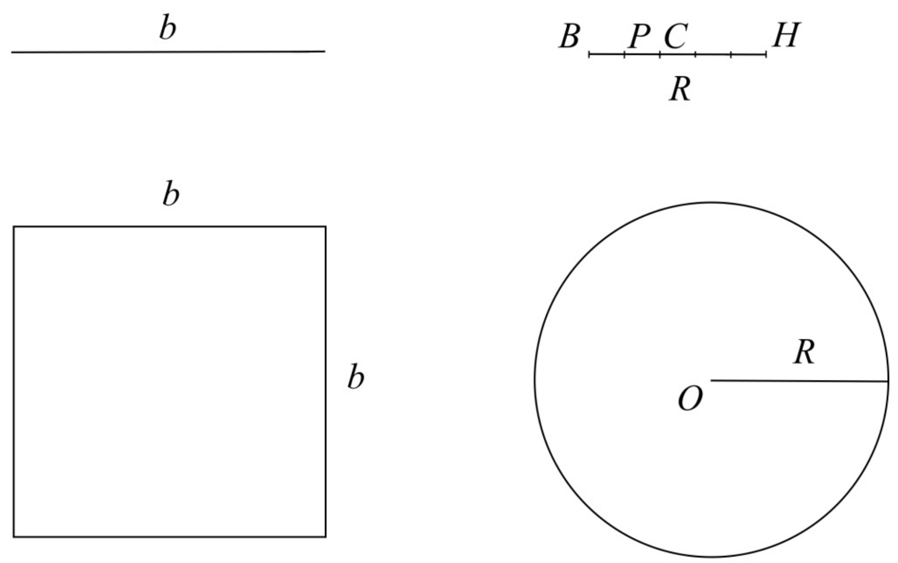

Рисунок 14.

На плоскости выбираем некоторую точку, обозначаем ее через *O* и проводим окружность с центром в точке *O* и радиусом длиной *BH* (Рис. 14). Площадь круга, ограниченного проведенной окружностью, равна площади заданного квадрата, таким образом, задача решена.

Выводы. В рамках классической геометрии найдена квадратура круга, то есть с помощью простой линейки и циркуля построен квадрат, площадь которого равна площади данного круга. Решена и обратная задача – с помощью простой линейки и циркуля построен круг, площадь которого равна площади данного квадрата.

Библиографический список

1. Плисова Н.Н. Основания геометрии. – 4-е изд. – М.: Эдитус, 2022. – 224 с.
2. Выгодский М.Я. Справочник по элементарной математике. – М.: АСТ: Астрель, 2006. – 509 с.